Dipartimento Interateneo di Fisica "M. Merlin"
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare

Quantum control and resource theories

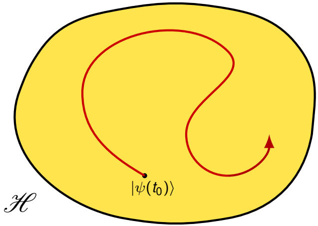
Giovanni Gramegna

Attività del primo anno

17 ottobre 2018

Dynamically induced superselection rules

L'evoluzione di un sistema è generata dalla sua Hamitloniana H.



Dynamically induced superselection rules

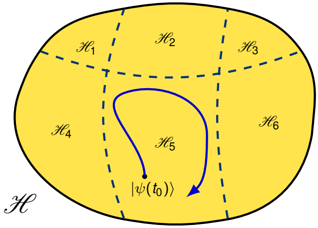
L'evoluzione di un sistema è generata dalla sua Hamitloniana H.

- Obiettivo: indurre regole di superselezione nella dinamica che permettano di ottenere una evoluzione controllata

$$H \to H_Z = \sum_{\mu} P_{\mu} H P_{\mu}, \qquad \mathscr{H} = \bigoplus_{\mu} \mathscr{H}_{\mu}, \quad \mathscr{H}_{\mu} = P_{\mu} \mathscr{H}$$

dove P_{μ} sono i proiettori sui sottospazi di superselezione: $P_{\mu} \mathscr{H} = \mathscr{H}_{\mu}$.

Due tecniche di controllo:



L'evoluzione di un sistema è generata dalla sua Hamitloniana H.

- Obiettivo: indurre regole di superselezione nella dinamica che permettano di ottenere una evoluzione controllata

$$H \to H_Z = \sum_\mu P_\mu H P_\mu, \qquad \mathscr{H} = \bigoplus_\mu \mathscr{H}_\mu, \quad \mathscr{H}_\mu = P_\mu \mathscr{H}$$

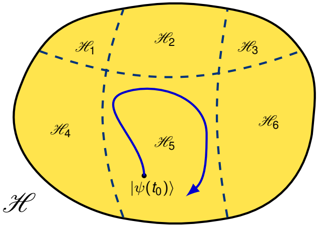
dove P_μ sono i proiettori sui sottospazi di superselezione: $P_\mu \mathscr{H} = \mathscr{H}_\mu$.

Due tecniche di controllo:

- **Strong continuous coupling**
  Accoppiare il sistema con un potenziale di controllo V:

$$H \to H + KV$$

con $V = \sum_\mu \lambda_\mu P_\mu$ e $K \to \infty$.



Dynamically induced superselection rules

L'evoluzione di un sistema è generata dalla sua Hamitloniana H.

- Obiettivo: indurre regole di superselezione nella dinamica che permettano di ottenere una evoluzione controllata

$$H \to H_Z = \sum_\mu P_\mu H P_\mu, \qquad \mathscr{H} = \bigoplus_\mu \mathscr{H}_\mu, \quad \mathscr{H}_\mu = P_\mu \mathscr{H}$$

dove P_μ sono i proiettori sui sottospazi di superselezione: $P_\mu \mathscr{H} = \mathscr{H}_\mu$.

Due tecniche di controllo:

- **Strong continuous coupling**
  Accoppiare il sistema con un potenziale di controllo V:

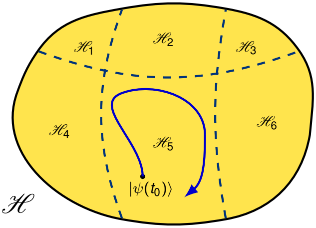
$$H \to H + KV$$

con $V = \sum_\mu \lambda_\mu P_\mu$ e $K \to \infty$.

- **Bang-Bang decoupling**
  Applicare impulsi istantanei ad alta frequenza al sistema:

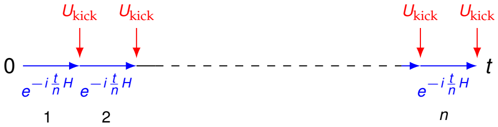
$$U_n(t) = \left(U_{\text{kick}} e^{-i\frac{t}{n}H}\right)^n$$

con $U_{\text{kick}} = \sum_\mu e^{-i\lambda_\mu} P_\mu$ e $n \to \infty$.



Dynamical decoupling

Evoluzione impulsata:

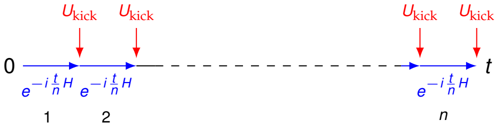


Kick Unitario

$$U_{\text{kick}} = \sum_{\mu} e^{-i\lambda_{\mu}} P_{\mu}$$

Dynamical decoupling

Evoluzione impulsata:



Kick Unitario

$$U_{\text{kick}} = \sum_\mu e^{-i\lambda_\mu} P_\mu$$

Idea del metodo: supponendo che $U_{\text{kick}}^m = \mathbb{I}$ per qualche $m \in \mathbb{N}$, per $n = km$ si avrà che:

$$U_n(t) = e^{-i\frac{t}{n}H_{n-1}} \cdots e^{-i\frac{t}{n}H_1} e^{-i\frac{t}{n}H_0}$$

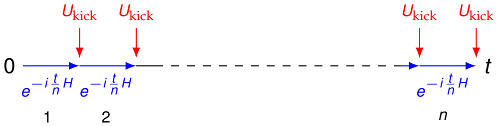
dove:

$$H_\ell = U_{\text{kick}}^{\dagger\ell} H U_{\text{kick}}^\ell$$

è l'Hamiltoniana "ruotata" con il kick

Dynamical decoupling

Evoluzione impulsata:



Kick Unitario

$U_{\text{kick}} = \sum_\mu e^{-i\lambda_\mu} P_\mu$

Idea del metodo: supponendo che $U_{\text{kick}}^m = \mathbb{I}$ per qualche $m \in \mathbb{N}$, per $n = km$ si avrà che:

$$U_n(t) = e^{-i\frac{t}{n}H_{n-1}} \cdots e^{-i\frac{t}{n}H_1} e^{-i\frac{t}{n}H_0}$$

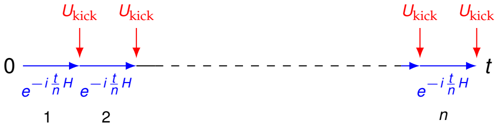
dove:

$$H_\ell = U_{\text{kick}}^{\dagger \ell} H U_{\text{kick}}^\ell$$

è l'Hamiltoniana "ruotata" con il kick

Quantum Control
Formule prodotto
Resource theories

Evoluzione impulsata:



Kick Unitario

$$U_{\text{kick}} = \sum_\mu e^{-i\lambda_\mu} P_\mu$$

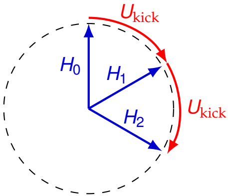
Idea del metodo: supponendo che $U_{\text{kick}}^m = \mathbb{I}$ per qualche $m \in \mathbb{N}$, per $n = km$ si avrà che:

$$U_n(t) = e^{-i\frac{t}{n}H_{n-1}} \dots e^{-i\frac{t}{n}H_1} e^{-i\frac{t}{n}H_0}$$

dove:

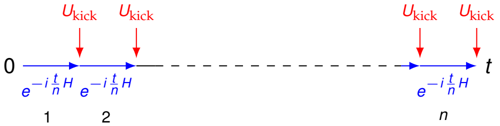
$$H_\ell = U_{\text{kick}}^{\dagger\ell} H U_{\text{kick}}^\ell$$

è l'Hamiltoniana "ruotata" con il kick



Dynamical decoupling

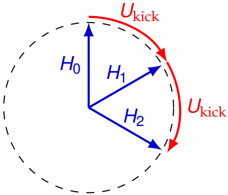
Evoluzione impulsata:



Kick Unitario

$$U_{\text{kick}} = \sum_\mu e^{-i\lambda_\mu} P_\mu$$

Idea del metodo: supponendo che $U_{\text{kick}}^m = \mathbb{I}$ per qualche $m \in \mathbb{N}$, per $n = km$ si avrà che:



$$U_n(t) = e^{-i\frac{t}{n}H_{n-1}} \dots e^{-i\frac{t}{n}H_1} e^{-i\frac{t}{n}H_0}$$

dove:

$$H_\ell = U_{\text{kick}}^{\dagger\ell} H U_{\text{kick}}^{\ell}$$

è l'Hamiltoniana "ruotata" con il kick

Si sta realizzando una sorta di "media effettiva":

$$\overline{H} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} H_\ell = \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} U_{\text{kick}}^{\dagger\ell} H U_{\text{kick}}^{\ell} = \dots = \sum_\mu P_\mu H P_\mu = H_Z \qquad (n = km)$$

$[H_Z, U_{\text{kick}}] = 0$, solo la parte diagonale nel kick sopravvive nel limite, mentre $H_{od} = H - H_Z$ (che soddisfa $[H_{od}, U_{\text{kick}}] \neq 0$) viene mediata a zero.

Confronto

Accoppiamento continuo

$$U_K(t) = e^{-it(KV+H)} = e^{-itKV} e^{-itH_Z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{K}\right), \qquad K \to \infty$$

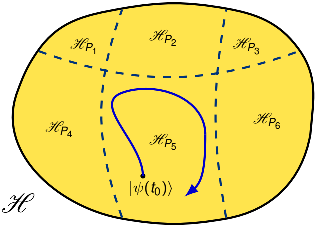
Evoluzione impulsata

$$U_n(t) = \left(e^{-itV} e^{-i\frac{t}{n}H}\right)^n = e^{-itnV} e^{-itH_Z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty$$

Si possono confrontare considerando una situazione intermedia

Situazione intermedia

$$U_{n,K}(t) = \left(e^{-i\frac{t}{n}KV} e^{-i\frac{t}{n}H}\right)^n$$



Burgarth D., Facchi P., Gramegna G., Pascazio S. (in preparation)

Confronto

Accoppiamento continuo

$$U_K(t) = e^{-it(KV+H)} = e^{-itKV} e^{-itH_Z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{K}\right), \qquad K \to \infty$$

Evoluzione impulsata

$$U_n(t) = \left(e^{-itV} e^{-i\frac{t}{n}H}\right)^n = e^{-itnV} e^{-itH_Z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty$$

Si possono confrontare considerando una situazione intermedia

Situazione intermedia

$$U_{n,K}(t) = \left(e^{-i\frac{t}{n}KV} e^{-i\frac{t}{n}H}\right)^n$$

Formula di Trotter ($n \to \infty$):

$$\left(e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}}\right)^n = e^{A+B} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Casi particolari:

- $K(n) = K_0 \Rightarrow$ Caso continuo
- $K(n) = n \Rightarrow$ Evoluzione impulsata
- $K(n) = n^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ situazione intermedia

Risultati analitici $K_\alpha(n) = n^\alpha$

Utilizzando una tecnica simile al controllo impulsato:

Controllo per $K_\alpha(n)$ $\quad 0 < \alpha < 1$

$$\left(e^{-i\frac{t}{n}K_\alpha(n)V}e^{-i\frac{t}{n}H}\right)^n - e^{-it(K_\alpha(n)V+H_Z)} = O\left(\frac{1}{K_\alpha(n)}\right) \qquad n \to \infty$$

Sappiamo inoltre che:

Strong Continuous Coupling

$$e^{-it(K_\alpha(n)V+H)} - e^{-it(K_\alpha V+H_Z)} = O\left(\frac{1}{K_\alpha(n)}\right) \qquad n \to \infty$$

Mettendo insieme i due risultati otteniamo:

Formula prodotto generalizzata $0 < \alpha < 1$

$$\left(e^{-i\frac{t}{n}K_\alpha(n)V}e^{-i\frac{t}{n}H}\right)^n - e^{-it(K_\alpha(n)V+H)} = O\left(\frac{1}{K_\alpha(n)}\right) \qquad n \to \infty$$

Trotter H.F.,Proc. Amer. Math. Soc. **10**, 545-551 (1959)
Feynman R.P., Reviews of Modern Physics. **20**, 367–387 (1948)

Noisy operations

- Una **Resource Theory** è definita da restrizioni sul set di operazioni che è possibile effettuare su di un sistema.
  - *Free states*: ottenibili con le operazioni permesse
  - *Resource states*: non ottenibili con le operazioni permesse.

  Scopo: determinazione di leggi che regolino la conversione tra resource states
- **Noisy operations.** Operazioni permesse: $\rho \in \mathcal{S}\left(\mathscr{H}_1\right) \mapsto \mathcal{E}(\rho) \in \mathcal{S}\left(\mathscr{H}_2\right)$ del tipo:

$$\mathcal{E}(\rho) = \mathrm{Tr}_b \left[U \left(\rho \otimes \frac{\mathbb{I}_a}{d_a} \right) U^\dagger \right]$$

  ovvero è possibile:
  - Aggiungere stati uniformi di dimensioni arbitrarie
  - Effettuare trasformazioni unitarie sul sistema complessivo
  - Scartare qualsiasi sottosistema (marginalizzare)

  Lo stato uniforme è l'unico *free state*, qualsiasi stato non uniforme è una risorsa.
- Conversioni esatte$\Leftrightarrow$ **Maggiorazione**, ovvero: $\rho \xrightarrow{\mathcal{N}} \sigma \Leftrightarrow \lambda(\rho) \succ \lambda(\sigma)$ dove:

$$x \succ y \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\ell} x_k^{\downarrow} \geqslant \sum_{k=1}^{\ell} y_k^{\downarrow} \qquad \forall \ell = 1, \ldots, n$$

  Tale relazione ha importanza anche nella resource theory dell'entanglement.

Entanglement e maggiorazione

Resource theory dell'entanglement:

- Operazioni permesse: comunicazione classica e operazioni locali sugli stati di sistemi multipartiti (LOCC operations)
- Free states: stati separabili, es: $|\Psi\rangle = |\chi\rangle \otimes |\varphi\rangle$
- Resource states: stati entanglati, es: $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\chi_1\rangle \otimes |\varphi_1\rangle + |\chi_2\rangle \otimes |\varphi_2\rangle\right)$

Si trova[1] che la conversione *deterministica* è determinata dalla maggiorazione:

$$|\psi\rangle \to |\phi\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda(\Psi) \prec \lambda(\Phi),$$

dove $\lambda(\Psi) = \lambda(\mathrm{Tr}_B[|\Psi\rangle\langle\Psi|])$.
Per una conversione non deterministica, la probabilità di successo è data da[2]:

$$P(\Psi \to \Phi) = \min_{\ell=1,\dots,n} \frac{\sum_{k=\ell}^{n} \lambda_k^{\downarrow}(\Psi)}{\sum_{k=\ell}^{n} \lambda_k^{\downarrow}(\Phi)}$$

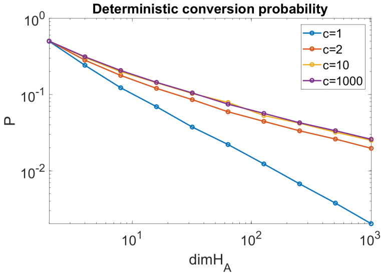
[1] Nielsen M.A., Phys. Rev. Lett. **83**, 436-439 (1999)
[2] Vidal G., Phys. Rev. Lett. **83**, 1046-1049 (1999)

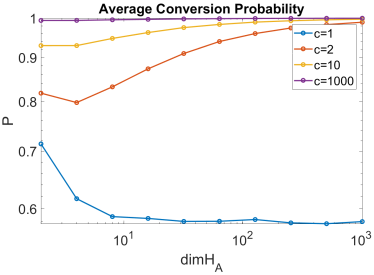
Statistica ad alte dimensioni

Considerati $|\Psi\rangle\,,|\Phi\rangle \in \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$ estratti uniformemente con la misura unitariamente invariante (Haar), ci chiediamo:

- Probabilità di conversione deterministica ($P(\Psi \to \Phi) = 1$)
- Probabilità media di successo in una conversione non deterministica ($\langle P(\Psi \to \Phi)\rangle$).

Risultati numerici:





$$c = \frac{\dim \mathscr{H}_B}{\dim \mathscr{H}_A}$$

Cunden F.D., Facchi P., Florio G., Gramegna G. (in preparation)

Partecipazione a Workshops

- 13–15 Dicembre 2017, **Statistical Mechanics & Field Theory**, Bari;
- 19–24 Febbraio 2018, **Mathematical Challenges in Quantum Mechanics**, Roma;
- 24–25 Marzo 2018, **Current Problems in Theoretical Physics**, Vietri sul Mare (SA);
- 5–12 Gugno 2018, **Seminario Nazionale di Fisica Nucleare e Subnucleare "Francesco Romano"**, Otranto (LE);
- 25–29 Giugno 2018, **Information Geometry, Quantum Mechanics and Applications**, San Rufo (SA), con presentazione del talk "Continuous and Pulsed Quantum Control";
- 17–20 Settembre 2018, **Italian Quantum Information Science conference**, Catania, con presentazione del poster "Continuous and Pulsed Quantum Control".

Corsi seguiti

- Prof.ssa D'Orazio, **Management and knowledge of European research model and promotion of research results** (completato);
- Prof.ssa White, **How to prepare a technical speech in English** (completato);
- Prof. Diacono, **Programing with Python for Data Science** (completato);
- Prof. Cafagna, **Introduction to C++ programming** (esame finale da conseguire);
- Prof. Gonnella, **Linear Stability analysis** (non ancora completato);
- Prof. Pascazio, **Differential equations and physical phenomena** (esame finale da conseguire);
- Prof. Facchi, **States, observables and Evolution** (completato);
- Prof. Pepe, **Atom-photon interactions** (completato).

Grazie per l'attenzione.