

Report attività primo anno  
dottorato di ricerca in Fisica  
XXXII ciclo

Pasquale Digregorio  
Tutore: Prof. Giuseppe Gonnella

7 novembre 2017

---

L'attività di ricerca svolta durante il primo anno di dottorato ha riguardato, come previsto durante la scrittura del progetto di ricerca presentato il 13 Dicembre 2016, l'analisi delle caratteristiche termodinamiche di sistemi di materia attiva attraverso uno studio numerico basato su simulazioni di dinamica molecolare. Si riporta di seguito, nell'introduzione di questa relazione, una breve descrizione dei sistemi di materia attiva al fine di esporre al meglio i problemi affrontati e gli obiettivi complessivi del progetto di ricerca.

Nei sistemi di cosiddetta *materia attiva* i componenti hanno la capacità di estrarre energia dall'ambiente o da un serbatoio interno e di dissiparla per compiere lavoro. Gli esempi più comuni di sistemi attivi appartengono al mondo dei sistemi viventi: in questo caso l'energia dei componenti è un'energia di natura chimica (prodotta da meccanismi biologici interni) e viene utilizzata per compiere normali attività vitali fra le quali la più interessante dal punto di vista di questo lavoro è il movimento. I sistemi attivi sviluppano comportamenti collettivi molto peculiari, strettamente connessi con la motilità dei loro costituenti, e che quindi sono del tutto assenti nei sistemi passivi. Lo studio dei sistemi attivi costituisce da qualche decennio un'attività di grande interesse [1, 2, 3, 4, 5]. Da una parte è interessante analizzare la fenomenologia dei comportamenti collettivi *innescati* dall'attività, che molto spesso conducono a nuovi stadi della materia che non hanno una controparte passiva [18, 19]. D'altra parte, la sfida dal punto di vista teorico di trovare una descrizione esaustiva per i sistemi di materia attiva è ancora oggetto di intenso dibattito. Nell'ambito della meccanica statistica, l'obiettivo della modellizzazione dei sistemi attivi trova interesse nel fatto che essi siano sistemi *intrinsecamente* fuori dall'equilibrio termodinamico. Inoltre, poiché la causa del non-equilibrio risiede al livello dei singoli costituenti e non nelle condizioni al contorno, la quantità di variabili in gioco non permette di fornire una descrizione complessiva dei fenomeni legati all'attività. Tuttavia esistono numerosi modelli per la descrizione della materia attiva che, sebbene a livello fenomenologico, forniscono gli strumenti adeguati alla comprensione delle caratteristiche peculiari di questi sistemi.

Nell'ambito del nostro lavoro sono stati considerati modelli di materia attiva che appartengono alla classe dei cosiddetti modelli di *Active Brownian Particles* (ABP). Questi ultimi sono modelli che, come suggerisce il nome, hanno come oggetto della descrizione i singoli costituenti attivi della materia. La dinamica cui essi sono soggetti ha una componente di tipo stocastico che esprime l'interazione con l'ambiente. La scelta di questo tipo di modellizzazione è adeguata ai fini dell'utilizzo di algoritmi di dinamica molecolare per gli studi numerici effettuati. Nel seguito della relazione si descriveranno i problemi affrontati durante l'attività del primo anno, di cui si riporta di seguito un elenco riassuntivo:

- studio numerico del diagramma di fase in funzione dell'attività di par-

ticelle Browniane attive di forma elongata (*dumbbell*). In particolare, come riportato nel dettaglio all'interno del testo, lo studio condotto ha evidenziato che vi è una coesistenza fra regioni con ordine esagonale e regioni di fase liquido/gassosa entro un intervallo finito di valori di packing fraction. Si è dimostrato inoltre che nel limite passivo questo intervallo rimane finito ed i suoi limiti si spostano con continuità al variare dell'intensità della forza attiva. Nell'ambito di questo studio è stato presentato un lavoro alla rivista *Physical Review Letters*, attualmente in fase di ultima revisione, di cui si allega la versione finale;

- studio della pressione di dumbbell e dischi attivi al fine di costruire un'equazione di stato fuori dall'equilibrio;
- caratterizzazione e analisi dei difetti topologici in una miscela binaria di fluidi attivi.

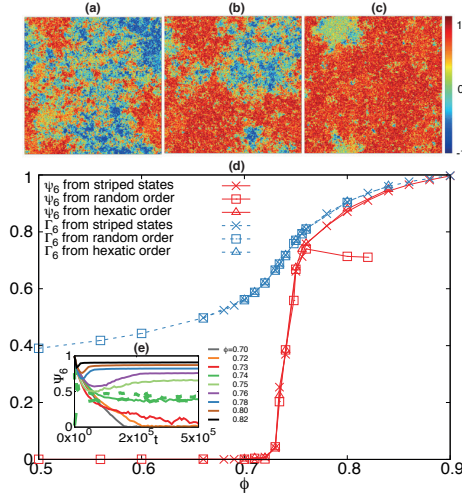
Il lavoro numerico è stato effettuato grazie alle risorse di calcolo hpc di Cineca e di ReCas.

## Motility-induced phase separation e transizione KTHN in un sistema di dumbbells

L'attività di ricerca del primo anno parte da uno studio preliminare, condotto durante l'attività di tesi magistrale, sui meccanismi di aggregazione e di *separazione di fase* in un sistema bidimensionale di dumbbell attive, molecole biatomiche che interagiscono secondo un'interazione a corto raggio puramente repulsiva e che sono autopropulse attraverso una forza attiva che agisce nella direzione dell'asse principale di ogni molecola. Nell'ambito del nostro studio numerico il sistema di dumbbell attive viene descritto attraverso l'uso di equazioni stocastiche in cui la scala di riferimento è quella della singola particella, ed il bagno termico è  $\delta$ -correlato. Si riportano di seguito le equazioni del moto di Langevin per le dumbbells:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\mathbf{r}}_i &= -\gamma\dot{\mathbf{r}}_i - \frac{\partial U_{FENE}}{\partial r_{i,i+1}} \hat{\mathbf{r}}_{i,i+1} - \sum_{j=0, j \neq i}^{2N} \frac{\partial U_{WCA}}{\partial r_{ij}} \hat{\mathbf{r}}_{ij} + F_{act}\hat{\mathbf{n}}_i + \boldsymbol{\eta}_i , \\
 m\ddot{\mathbf{r}}_{i+1} &= -\gamma\dot{\mathbf{r}}_{i+1} + \frac{\partial U_{FENE}}{\partial r_{i,i+1}} \hat{\mathbf{r}}_{i,i+1} - \sum_{j=0, j \neq i+1}^{2N} \frac{\partial U_{WCA}}{\partial r_{i+1,j}} \hat{\mathbf{r}}_{i+1,j} + F_{act}\hat{\mathbf{n}}_{i+1} + \boldsymbol{\eta}_{i+1} , \\
 \langle \eta_{i,a}(t) \rangle &= 0 , \quad \langle \eta_{i,a}(t) \eta_{i,b}(t') \rangle = 2\gamma k_B T \delta_{ij} \delta_{ab} \delta(t - t') \quad a, b = x, y .
 \end{aligned} \tag{1}$$

Sulla base di numerosi studi precedenti [6, 7, 8, 9], la separazione di fase del sistema attivo è stata messa in relazione alle fasi del sistema passivo all'equilibrio termodinamico.

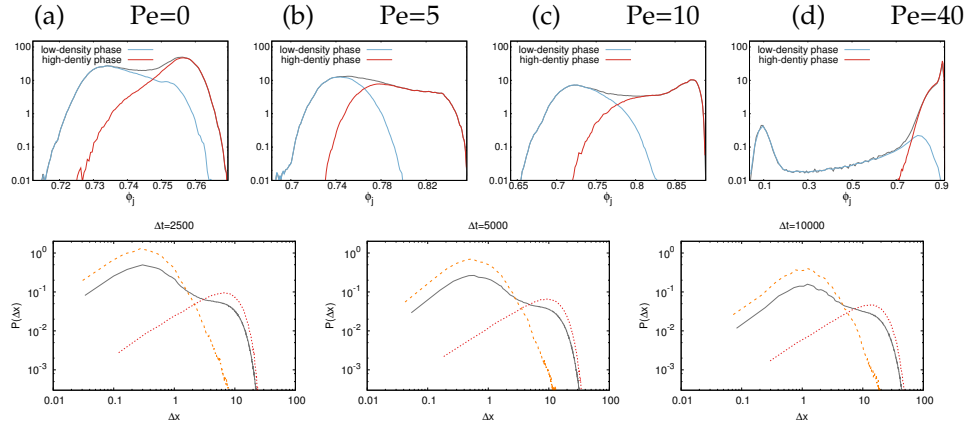


**Figura 1:** Sistema passivo. Nella parte superiore il parametro hexatico locale  $\psi_{6,i}$  in configurazioni di equilibrio per differenti valori di frazione di superficie. Da sinistra verso destra:  $\phi = 0.734, 0.740, 0.750$ . Nella parte inferiore l'andamento di  $\Psi_6$  e  $\Gamma_6$  definite in (3) in funzione di  $\phi$ . Nel inset è raffigurata l'evoluzione temporale di  $\Psi_6$  per valori differenti di frazione di superficie.

Le transizioni di fase nei sistemi bidimensionali passivi con interazione a corto raggio hanno caratteristiche peculiari. Alcuni noti risultati stabiliscono che i sistemi bidimensionali non possono formare cristalli con correlazione a lungo raggio, ma possono tuttavia esistere in una fase di equilibrio ordinata [10]. Il meccanismo alla base delle transizioni ordine/disordine nei sistemi bidimensionali viene descritto in maniera formale nell'ambito della teoria delle transizioni topologiche dovuta a Halperin, Nelson, Berezinskii, Kosterlitz e Thouless [11, 12].

Alcuni recenti risultati [13] mostrano che per sistemi bidimensionali di dischi con potenziale repulsivo a corto raggio la transizione liquido/solido al variare della frazione di superficie avviene in due step, con una transizione continua di tipo BKT [11, 12] fra il solido e la fase *hexatica*, ed una transizione del primo ordine fra la fase hexatica e il liquido. La fase hexatica non ha ordine posizionale ma possiede un ordine orientazionale di tipo *quasi-long-range*, la fase solida è caratterizzata da ordine posizionale di tipo *quasi-long-range* e ordine orientazionale a lungo raggio. La transizione liquido/hexatico del primo ordine è caratterizzata da un intervallo di valori di frazione di superficie in cui regioni di con ordine orientazionale a lungo raggio (fase hexatica) coesistono con la fase liquida.

Lo studio numerico condotto durante l'attività di tesi ha evidenziato un legame fra la regione di coesistenza nel sistema passivo e la fase separata del sistema attivo. In particolare, l'intervallo di valori di frazione di superficie entro cui si realizza la coesistenza di due fasi nel sistema di dumbbell passive si modifica con continuità introducendo l'attività e muovendosi, nello spazio dei parametri, verso regioni in cui è presente un'attività sempre più intensa [14]. Questo risultato costituisce una novità nell'ambito dello studio del meccanismo della motility-induced phase separation e rappresenta una direzione interessante nella comprensione del fenomeno. Per questa



**Figura 2:** Linea superiore: distribuzione della densità locale lungo la linea 50%-50% nel piano  $Pe-\phi$ . (a)-(d) La distribuzione totale (in nero) ed i contributi delle regioni ad bassa densità (in blu) ed alta densità (in rosso). I due contributi si riferiscono a punti che hanno il modulo del parametro d'ordine hexatico (mediato entro un raggio dell'ordine di qualche diametro  $\sigma$  delle particelle) maggiore di 0.75 (in rosso) e minore di 0.75 (in blu). Linea inferiore: distribuzione degli spostamenti dei centri di massa delle dumbbells lungo la stessa linea per tutte le particelle (linea nera continua), per particelle che rimangono nelle regioni aggregate per tutto il tempo di osservazione (linea arancione tratteggiata) e per le particelle al di fuori delle regioni aggregate (linea rossa punteggiata). Gli spostamenti sono calcolati tutti nel regime diffusivo.

ragione durante il primo anno un notevole sforzo è stato profuso nell'analisi di quantità statistiche utili alla conferma definitiva di questa proprietà. Nel seguito si descrivono le quantità osservate e si riassumono i risultati ottenuti.

Il parametro d'ordine hexatico locale è il seguente

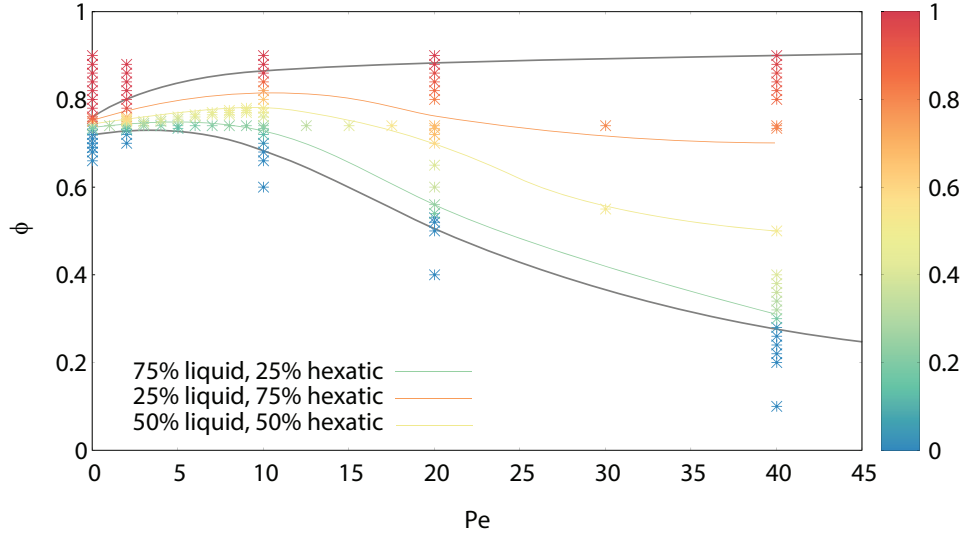
$$\psi_6(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} e^{i6\theta_{ij}(\mathbf{r}_i)}, \quad (2)$$

dove  $n_i$  è il numero di primi vicini della particella  $i$  e  $\theta_{ij}(\mathbf{r}_i)$  è l'angolo compreso fra il segmento che congiunge la particella  $i$  con il suo vicino  $j$  e una direzione di riferimento. Questo parametro misura l'ordine hexatico locale nel sistema e le medie globali

$$\Psi_6 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_{6,i} \quad \text{e} \quad \Gamma_6 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\psi_{6,i}| \quad (3)$$

sono state utilizzate per caratterizzare la transizione di fase di BKT. Si riporta in Figura il comportamento di questi parametri per il sistema di dumbbell passive e alcune configurazioni significative del parametro hexatico locale.

Al fine di studiare le caratteristiche della transizione di fase nel sistema attivo sono state considerate altre quantità, al variare dell'intensità della



**Figura 3:** Diagramma di fase con le curve a ripartizione costante fra regioni liquide e regioni hexatiche. La curva nera rappresenta i limiti della regione di spazio delle fasi in cui si osserva separazione di fase. In rosso, giallo e verde sono indicate le linee con frazione costante di fase liquida e fase hexatica, con proporzioni riportate in figura. Queste linee sono interpolazioni dei dati delle simulazioni per i casi seguenti:  $Pe = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12.5, 15, 17.5, 20, 30, 40$ .

forza di autopropulsione delle particelle, espressa in termini di un parametro adimensionale chiamato numero di Péclet e legato alla forza attiva che compare nelle equazioni del moto dalla relazione:  $Pe = 2F_{act}\sigma/(k_B T)$ , dove  $\sigma$  è il diametro delle particelle. Le quantità più significative sono la distribuzione di densità locale e la distribuzione degli spostamenti delle singole particelle. I risultati ottenuti sono riportati in Figura 2.

Come mostrato in figura, grazie a questa analisi si è riusciti all'interno della configurazione, a distinguere in maniera molto precisa le regioni ordinate da quelle disordinate. In questo modo, aumentando l'intensità della forza attiva e variando il valore di frazione di superficie totale in modo che le aree occupate dalle due regioni fossero sempre uguali, si è condotto uno studio approfondito dell'interno spazio dei parametri, riportato in Figura 3. La costruzione di questo diagramma di fase costituisce il primo risultato significativo conseguito nell'ambito dello studio proposto nel progetto di dottorato. Le analisi condotte hanno dimostrato che, guardare al fenomeno della motility-induced phase separation dal punto di vista della transizione ordine-disordine permette di stabilire una relazione fra la separazione di fase nel sistema attivo in regime di non equilibrio e la coesistenza fra le due fasi che si osserva nell'ambito della transizione del primo ordine nel limite passivo. Questi risultati costituiscono il contenuto di un lavoro proposto per una pubblicazione [14], scritto con il Prof. Gonnella e in collaborazione con la Professoressa Leticia Cugliandolo (Université Pierre et Marie Curie,

---

Parigi) e il Dott. Antonio Suma (Sissa, Trieste).

## Estensione al caso di dischi attivi e pressione attiva

Il risultato ottenuto attraverso lo studio di un sistema di dumbbell attive, come illustrato nella sezione precedente, costituisce un'interpretazione decisamente innovativa dei fenomeni di aggregazione indotti dall'attività e in particolare della motility-induced phase separation. Infatti, nonostante altri lavori recenti propongano studi che si muovono nella stessa direzione, la totalità della letteratura riguardo la MIPS stabilisce l'esistenza di un valore critico di attività come soglia per l'innescare dei meccanismi che conducono alla separazione di fase (si veda per esempio [20]). I nostri risultati invece, approfondendo il legame della separazione di fase attiva con la coesistenza nel limite passivo, stabiliscono che la regione di coesistenza sia connessa con continuità in tutto lo spazio dei parametri del sistema e che quindi non sia possibile osservare un valore di soglia per l'attività. Questo risultato inoltre è molto coerente con lo scenario della transizione solido-liquido del sistema attivo e del suo limite passivo.

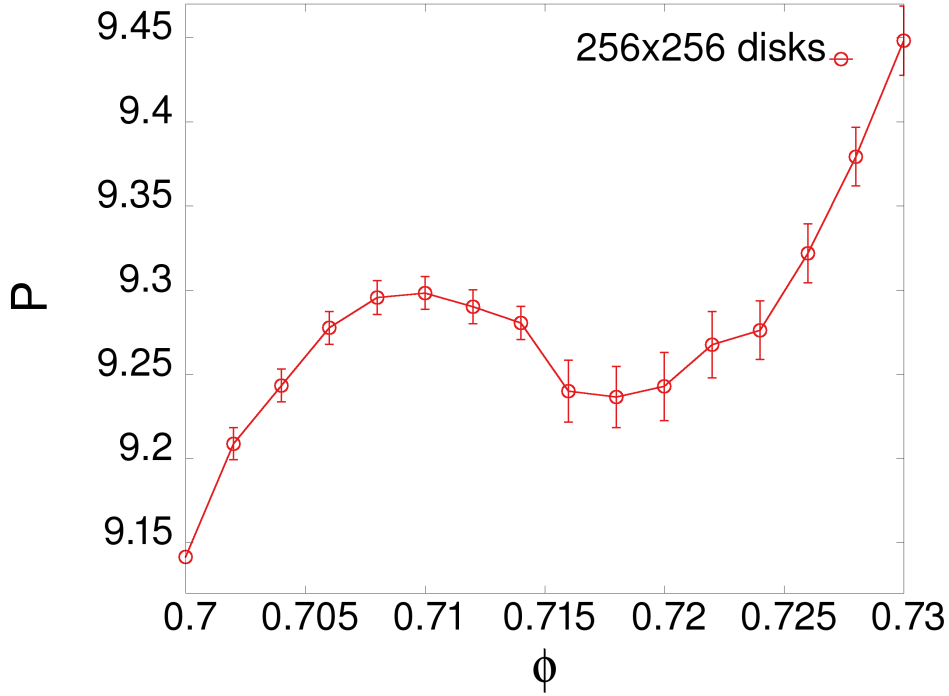
Tuttavia, nonostante il modello delle dumbbell rappresenti un modello molto minimale di materia attiva cui possono ricondursi diversi risultati molto generali, dal punto di vista della motility-induced phase separation si osservano notevoli differenze fra dumbbell attive e sichi passivi. Queste differenze sono ovviamente legate alla forma dei costituenti che, nel caso delle dumbbell, favorisce l'aggregazione e la stabilità dei cluster in presenza di attività. Per questo motivo, al fine di indagare la generalità dei nostri risultati, abbiamo scelto di effettuare uno studio simile nel caso di dischi attivi. Le equazioni del moto di un sistema di dischi browniani attivi sono le seguenti:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}}_i(t) &= -\gamma\dot{\mathbf{r}}_i(t) + \mathbf{F}_i(t) + \boldsymbol{\xi}_i(t) \\ \dot{\theta}_i(t) &= \eta_i(t), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4)$$

dove

$$\begin{aligned} \langle \xi_{i,a}(t) \rangle &= 0, \quad \langle \xi_{i,a}(t) \xi_{j,b}(t') \rangle = 2\gamma k_B T \delta_{ij} \delta_{ab} \delta(t - t'), \\ \langle \eta_i(t) \rangle &= 0, \quad \langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = 2D_\theta \delta_{ij} \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (5)$$

Si noti come per ottenere la dinamica di dischi autopropulsi vi sia la necessità di introdurre un ulteriore parametro nel modello poiché i dischi non hanno una direzione privilegiata come le dumbbell. Questo è il motivo per cui si può pensare al modello di dumbbell attive come ad un modello ancora più fondamentale nell'ambito della descrizione di sistemi con componenti autopropulsi. Il lavoro numerico sul sistema di dischi attivi e passivi è cominciato durante questo primo anno. La prima fase di implementazione del programma per le simulazioni è concluso e sono stati effettuati diversi



**Figura 4:** Risultati del calcolo della pressione mediante le formule 8 e 9 per un sistema di  $256^2$  dischi passivi in corrispondenza di diversi valori di frazione di superficie all'interno della regione di coesistenza della transizione del primo ordine fra liquido e solido hexatico.

test di stabilità. Sono stati inoltre riprodotti alcuni risultati noti sia per i dischi passivi sia per i dischi attivi per verificare la correttezza dell'algoritmo numerico utilizzato.

La necessità dello studio del diagramma di fase per i dischi attivi proviene inoltre dalla volontà di condurre un'analisi quantitativa dei risultati riportati per le dumbbell nella sezione precedente. È noto infatti che, nell'ambito dei sistemi passivi, è possibile ottenere informazioni significative sulle caratteristiche della transizione del primo ordine, e quindi sulle proprietà della regione di coesistenza che vi corrisponde, studiando l'andamento non monotono delle isoterme nel diagramma pressione-volume. La non monotonicità delle isoterme è un effetto dovuto alla presenza di un'energia libera di interfaccia (che quindi scompare nel limite termodinamico) quando le due fasi coesistono alla transizione [21]. È inoltre noto, grazie a recentissimi risultati nell'ambito dei sistemi attivi, che è possibile definire una pressione anche per tali sistemi, benché essi evolvano fuori da condizioni di equilibrio termodinamico.

L'obiettivo che ci siamo posti è quindi quello di trovare una definizione coerente di pressione nel caso dei nostri modelli, che possa essere utilizzata anche in presenza di una forza attiva e che possa restituire risultati signi-



ficativi nello studio della transizione di fase in cui è coinvolta la motility-induced phase separation. Si riportano di seguito i risultati ottenuti nel calcolo della pressione per un sistema di particelle browniane passive.

Manipolando una soluzione formale di 4 si ottiene la seguente equazione del viriale:

$$m\langle \dot{\mathbf{r}}_i(t)^2 \rangle = 2dD - \langle \mathbf{F}_i(t) \cdot \mathbf{r}_i(t) \rangle. \quad (6)$$

Nel caso in cui le simulazioni vengono effettuate utilizzando condizioni al bordo periodiche, nel viriale intervengono sia le forze fra le particelle reali, sia quelle fra le immagini periodiche di queste ultime. Per questo si scrive in generale:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^N \sum_{\mathbf{n}} \mathbf{F}_{ij}^{(\mathbf{n})}, \quad n_a \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Dall'equazione del viriale 6 si ottiene una forma per la *pressione esterna*

$$P_{ext} = \frac{N\gamma D}{V} - \frac{1}{2dV} \left\langle \sum_{i,j=1}^N \sum_{\mathbf{n}} \mathbf{F}_{ij}^{(\mathbf{n})}(t) \cdot \mathbf{n}L \right\rangle \quad (8)$$

e una forma per la *pressione interna*

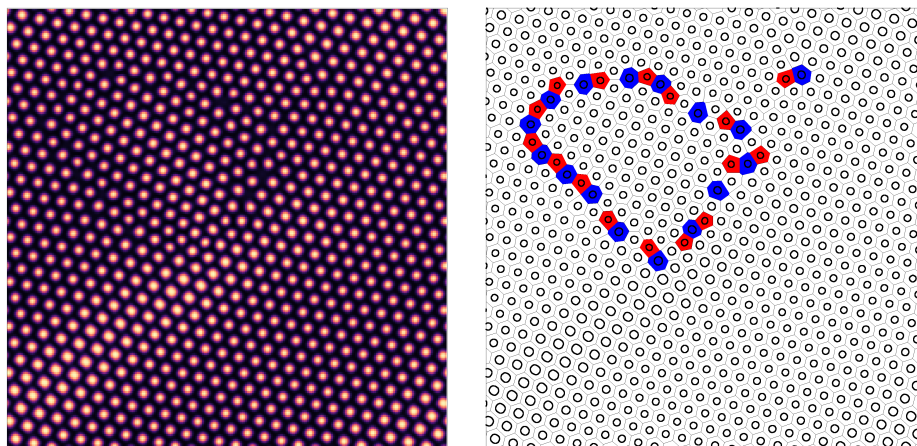
$$P_{int} = \frac{1}{dV} \left\langle \sum_{i=1}^N m \dot{\mathbf{r}}_i^2(t) \right\rangle + \frac{1}{2dV} \left\langle \sum_{i,j=1}^N \sum_{\mathbf{n}} \mathbf{F}_{ij}^{(\mathbf{n})}(t) \cdot (\mathbf{r}_{ij}(t) - \mathbf{n}L) \right\rangle. \quad (9)$$

Queste formule, oltre ad essere facilmente estendibili al caso di particelle passive, ci hanno permesso di riprodurre il loop di Mayer-Wood in corrispondenza della transizione del primo ordine nel sistema di dischi passivi (Figura 4). Questo è il primo risultato ottenuto nel contesto del lavoro sulla pressione, che ci permette di poter studiare in maniera più approfondita la transizione di fase per i dischi passivi. L'obiettivo è condurre uno studio analogo per il sistema attivo e, successivamente, estendere il calcolo della pressione ad un sistema di dumbbell e utilizzarlo per caratterizzare con maggiore accuratezza il diagramma di fase del modello.

Nell'ambito di questo lavoro è stata avviata una collaborazione con il gruppo di ricerca in Condensed Matter Physics della Universitat de Barcelona. In particolare il Prof. Ignacio Pagonabarraga e il Dott. Demian Levis stanno conducendo un lavoro nella stessa direzione dei nostri obiettivi e si sono mostrati estremamente interessati a proseguire congiuntamente lo studio sulla pressione e sullo scenario delle transizioni di fase per sistemi di particelle attive.

## Miscele binarie attive

Durante il primo anno di dottorato è stato inoltre sviluppato un algoritmo di *cluster analysis* come contributo ad uno studio sulle proprietà topologiche



**Figura 5:** A sinistra il contour plot della concentrazione locale. Si distinguono chiaramente le droplet di fase attiva e il loro ordine esagonale. A destra il risultato dell'applicazione dell'algoritmo di cluster analysis per separare droplet differenti e ricavare la posizione del loro centro di massa. Nella figura di destra è inoltre riportata la costruzione di Voronoi e i difetti topologici: in rosso sono indicate le droplet con cinque primi vicini, in blu quelle con sette vicini.

di una miscela binaria di due fluidi di cui uno attivo. Lo studio numerico, condotto dal Prof. Gonnella, dal Dott. Antonio Lamura e dagli studenti di dottorato Giuseppe Negro e Livio Carenza, ha dimostrato, con utilizzo di algoritmi Lattice Boltzmann, che la fase attiva della miscela può trovarsi in una configurazione di droplets che si dispongono con ordine di tipo esagonale. Il contributo apportato ha fatto uso delle conoscenze riguardo l'analisi dei difetti topologici acquisite nell'ambito dello studio della transizione liquido-solido per sistemi bidimensionali. Infatti, come riportato precedentemente, le transizioni di fase in 2d sono mediate dalla dinamica di *binding/unbinding* dei difetti topologici tipici di un reticolo bidimensionale, quali *disclinazioni* e *dislocazioni*. Questo contributo ha permesso, attraverso l'algoritmo di cluster analysis e la tassellazione di Voronoi (di vedano le immagini riportate in Figura 5), di caratterizzare la presenza di difetti topologici nella struttura ordinata delle droplets e, successivamente, di studiare il ruolo dell'attività nelle proprietà topologiche della miscela. I risultati ottenuti in questo studio sono stati proposti per una pubblicazione, di cui si allega il materiale già sottomesso e in fase in revisione.

## Attività didattica

Titoli dei corsi seguiti durante il primo anno:

- 
- Management and knowledge of European research model and promotion of research results;
  - How to prepare a technical speech in English;
  - Programing with Python for Data Science;
  - C++;
  - Renormalization of field theories;
  - Interpolation Methods e techniques for Exsperimental Data Analysis;
  - Linear Stability analysis;
  - Lévy processes and applications.

## Conferenze e scuole

Durante il primo anno ho inoltre partecipato a tre conferenze e una summer school:

- **FLOWING MATTER 2017**, 23-27th January 2017, PORTO (Portugal).  
Nell'ambito di questa conferenza ho presentato un contributo orale dal titolo "Phase co-existence in bidimensional passive and active dumbbell systems"
- **XXIX SEMINARIO NAZIONALE di FISICA NUCLEARE E SUB-NUCLEARE "Francesco Romano"**, 25 Maggio - 1 Giugno 2017, OTRANTO (LE)
- **Liquids 2017 - 10th liquid matter conference**, 17-21th July 2017, Ljubljana (Slovenia).  
Nell'ambito di questa conferenza ho presentato un poster sui risultati ottenuti nell'ambito dello studio del diagramma di fase delle dumbbell attive.
- **The Beg Rohu Summer School - Out of equilibrium dynamics, Evolution and Genetics**, 24 July - 5 August 2017, Beg Rohu (France).  
Durante la scuola ho seguito le seguenti lezioni: Out of Equilibrium Dynamics of Complex Systems (L.F. Cugliandolo); Evolutionary Dynamics of Large Populations (D.S. Fisher); Counting Equilibria in Complex Systems via Random Matrices (Y.V. Fyodorov); Population Genetics in Space and Time (D.R. Nelson).

---

# Bibliografia

- [1] Ramaswamy S., Annual Review of Condensed Matter Physics **1** (2010)
- [2] Marchetti M.C., *et al.*, Rev. Mod. Phys. **85**, 1143–1189 (2013)
- [3] Vicsek T., Czirók A., Ben-Jacob E., *et al.*, Phys. Rev. Lett. **75**, 1226–1229 (1995)
- [4] Toner J., Tu Y., Ramaswamy S., Annals of Physics **318**, 170-244 (2005)
- [5] Vicsek T., Zafeiris A., Physics Reports **517**, 3–4 (2012)
- [6] Suma, A. and Gonnella, G. and Laghezza, G. and Lamura, A. and Mossa, A. and Cugliandolo, L. F., Phys. Rev. E **90**, 052130 (2014)
- [7] Suma, A. and Gonnella, G. and Marenduzzo, D. and Orlandini, E., EPL (Europhysics Letters) **108**, 56004 (2014)
- [8] Cugliandolo, L. F. and Gonnella, G. and Suma, A., Phys. Rev. E **91**, 062124 (2015)
- [9] Gonnella, G. and Lamura, A. and Suma, A., International Journal of Modern Physics C, **25**, 1441004, (2014)
- [10] Mermin N. D., Wagner H., Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966)
- [11] Kosterlitz J. M., Thouless D. J., J. Phys. C **6**, 1181 (1973)
- [12] Halperin B. I., Nelson D. R., Phys. Rev. Lett. **41**, 121 (1978)
- [13] Bernard, E. P., Krauth W., Phys. Rev. Lett. **107**, 155704 (2011)
- [14] Cugliandolo L. F., Digregorio P, Gonnella G., Suma A., **arXiv** (2016)
- [15] Solon A. P., Stenhammar J., Cates M. E., Kafri Y., Tailleur J., **arXiv** (2016)
- [16] Ginot F., Theurkauff I., Levis D., Ybert C., Bocquet L., Berthier L., Cottin-Bizonne C., Phys. Rev. X **5**, 011004 (2015)
- [17] Suma A., Cugliandolo L. F., Gonnella G., Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment **2016**, 054029 (2016)

- [18] Nguyen Thu Lam K., Schindler M., Dauchot O., New Journal of Physics **17**, 113056 (2015)
- [19] Nguyen Thu Lam K., Schindler M., Dauchot O., Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment **2015**, 10017 (2015)
- [20] Levis D., Codina J., Pagonabarraga I., Soft Matter, (2017)
- [21] Mayer J.E., Wood W.W., J. Chem. Phys. **42**, 4268 (1965)