

# RELAZIONE ATTIVITÀ DI RICERCA

DOMENICO POMARICO - I ANNO

SUPERVISOR: PROF. SAVERIO PASCAZIO, DOTT. FRANCESCO V. PEPE

INTRODUZIONE . . . . .	1
EQUAZIONE DI DIRAC . . . . .	3
GRUPPO DISCRETO DI HEISENBERG . . . . .	5
TENSOR NETWORK STATES. . . . .	6
ATTIVITÀ DIDATTICHE . . . . .	9

## INTRODUZIONE

L'ambito della ricerca programmata durante il mio corso di dottorato si contestualizza nel quantum computing, in particolare nello studio dell'implementazione di simulatori quantistici di teorie di gauge su reticolo. Le realizzazioni sperimentali di simulatori di teorie di gauge devono operare a temperature prossime allo zero assoluto per evitare effetti di perdita di coerenza. L'utilizzo del formalismo riguardante sistemi quantistici fortemente correlati ha consentito di superare l'approccio dettato dalla procedura computazionale di rinormalizzazione di Wilson, agente per mezzo di cut-off sull'energia, permettendo così di analizzare un'ampia classe di sistemi di interesse per gli esperimenti. [1]

Uno dei sistemi che si prestano meglio a tale realizzazione è rappresentato dagli atomi ultrafreddi in reticoli ottici, realizzati attraverso campi laser classici, consentendo così un controllo esterno della dinamica riguardante gli atomi intrappolati. Per fare un simulatore quantistico in grado di includere un numero arbitrariamente grande di gradi di libertà, occorre che il modello teorico sia scalabile, ossia generalizzabile per un qualsiasi numero di qubit, così permettendo di aumentare esponenzialmente la potenza di calcolo.

Una volta preparato lo stato iniziale del sistema, la dinamica di interesse può essere implementata in maniera digitale, attraverso l'applicazione successiva

di operatori unitari a tempi discreti, oppure in maniera analogica, lasciando il sistema evolvere in modo continuo nel tempo secondo l'Hamiltoniano scelto. Nell'ambito del mio programma di ricerca, ho considerato la teoria di gauge abeliana su reticolo relativa al modello di Schwinger per la QED in una dimensione spaziale discretizzata, ossia in un reticolo lineare, ed una temporale continua. I cosiddetti fermioni staggered [1] vengono utilizzati per risolvere il problema del fermion doubling riguardante la degenerazione delle autofunzioni dell'operatore impulso su reticolo. In questo modello, il mare di Dirac è rappresentato dallo stato con occupazione a siti alterni, in particolare dei siti a cui è associata massa negativa. Nel corrispondente Hamiltoniano, ciò è legato alla presenza di un termine di massa a segni alterni in dipendenza dal label intero  $x$  dei siti, cioè con un fattore  $(-1)^x$  [2].

I campi di gauge sono associati ai link tra i siti del reticolo, la descrizione del relativo spazio di Hilbert infinito-dimensionale non è simulabile, in pratica, con un sistema sperimentalmente realizzabile e controllabile, per cui i modelli orientati ai quantum simulators, tra cui il quantum link model (QLM), applicano un troncamento per ottenere un numero finito di gradi di libertà locali, sacrificando la natura unitaria della connessione di gauge. Tale problema può essere evitato attraverso il gruppo di Schwinger-Weyl [2,3], che rappresenta la discretizzazione del gruppo generato dall'algebra di Heisenberg definita da campo elettrico e potenziale vettore di ciascun link, così ottenendo degli spazi di Hilbert locali  $n$ -dimensionali e mappando il gruppo di Lie abeliano  $U(1)$  nel gruppo abeliano discreto  $\mathbb{Z}_n$ .

L'approccio numerico ai sistemi quantistici fortemente correlati fa riferimento al density matrix renormalization group (DMRG) [4], schema variazionale applicato per la ricerca del ground state di sistemi unidimensionali, ma la cui estensione a dimensione spaziale generica richiede lo sviluppo di nuovi formalismi. Il DMRG si basa fondamentalmente sulla bipartizione dei reticoli lineari attraverso la singular value decomposition (SVD): tale schema iterativo fornisce un'espressione dello stato del sistema in termini di *matrix product states* (MPS). Attraverso questa espressione, è possibile applicare un'approssimazione della matrice densità ridotta, che limita ad un andamento polinomiale (rispetto a quello esponenziale previsto in mancanza di approssimazioni) la crescita del numero di gradi di libertà nel limite termodinamico. [5] Una generalizzazione per più dimensioni applica la SVD a tensori [6], stabilendo una corrispondenza tra il numero di link per ciascun sito e il rango dell'associato tensore nei projected entangled pair states (PEPS). [7]

Questo approccio è utilizzato per caratterizzare le transizioni di fase dei ground state: nell'attività di ricerca verrà affrontato questo tema nell'intento di identificare le classi di universalità di eventuali transizioni di fase della QED su reticolo, al variare dei parametri di massa e carica [3,8].

## EQUAZIONE DI DIRAC

L'equazione di Dirac rappresenta la base della meccanica quantistica relativistica. Essa è stata formulata per curare l'assenza di un'interpretazione probabilistica dell'equazione di Klein-Gordon, non dotata di una derivata temporale del primo ordine come l'equazione di Schrödinger. La soluzione si è basata sulla ricerca di una forma di Hamiltoniano relativistico tale che ( $\hbar = c = 1$ ):

$$\mathcal{H}^2 = -\Delta + m^2,$$

dove  $m$  è la massa a riposo di una particella e  $\Delta = -p^2$ . La questione fondamentale riguarda l'ottenimento di un Hamiltoniano locale, che agisca su funzioni calcolate in un determinato punto, restituendo una nuova funzione calcolata nella stesso punto. Nel caso di  $\sqrt{-\Delta}$ , operatore pseudo-differenziale, questa caratterizzazione non è ottenibile, in quanto questo operatore applicato ad una funzione si può esprimere solo sotto forma di convoluzione con un opportuno kernel integrale.

Allo scopo di mantenere la località nella descrizione relativistica, Dirac introdusse le matrici  $N \times N \gamma^\mu$ , con  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , in uno spazio-tempo a 4 dimensioni, che agiscono sulle  $N$  componenti di una funzione d'onda  $\psi$ , detta spinore. La soluzione trovata da Dirac risulta quindi:

$$i \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = -i \sum_{j=1}^3 \gamma^0 \gamma^j \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^j} + m \gamma^0 \psi(x).$$

Iterando l'applicazione di tale Hamiltoniano si trova che tutte le componenti dello spinore soddisfano anche l'equazione di Klein-Gordon  $(\partial_t^2 - \Delta + m^2) \psi = 0$ , a condizione che le matrici  $\gamma$  formino un'algebra di Clifford in modo da non avere derivate seconde miste.

L'attività di ricerca ha riguardato le proprietà dell'equazione di Dirac rispetto alle trasformazioni di Lorentz in dimensione generica. L'algebra di Lie associata può essere espressa riarrangiando le componenti dei generatori antisimmetrici  $J^{\mu\nu}$  del gruppo di Lorentz in 2 vettori spaziali  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{K}$  associati rispettivamente alle rotazioni ed ai boost.

Per poter affrontare i problemi a dimensionalità ridotta obiettivo del progetto di ricerca, durante la mia attività ho considerato l'estensione dell'algebra di Clifford per generici gruppi speciali ortogonali  $SO(D-1, 1)$ , dove l'ordine  $N$  delle matrici di Dirac è legato alla dimensione  $D$  dalla relazione  $N = 2^{\lfloor \frac{D}{2} \rfloor}$ , dove  $\lfloor \dots \rfloor$  è la parte intera.

Per capire questa caratterizzazione è utile introdurre la rappresentazione spinoriale, emergente in una prima versione non banale per  $D = 4$ , attraverso la

definizione dei generatori  $\mathbf{J}^\pm = \frac{\mathbf{J} \pm i\mathbf{K}}{2}$ , che commutano tra loro. In questo modo si ottiene la cosiddetta rappresentazione chirale, data dalla somma diretta di 2 rappresentazioni irriducibili di dimensione  $\frac{N}{2} = 2^{\lfloor \frac{D}{2} \rfloor - 1}$  associate alle singole osservabili  $\mathbf{J}^+$  e  $\mathbf{J}^-$  nel caso di  $D$  pari.

Per  $D$  dispari, invece, la rappresentazione chirale non esiste: per esempio in  $SO(2, 1)$  ci sono 3 parametri indipendenti, uno associato alle rotazioni sul piano e gli altri 2 alle componenti di velocità, comportando un'asimmetria nel numero di componenti per  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{K}$  causante l'impossibilità di definire  $\mathbf{J}^\pm$ , mentre in  $SO(1, 1)$  c'è il solo parametro di boost, i cui segni sono entrambi banalmente inclusi nella rappresentazione chirale. Nel modello di Schwinger ciò consente la definizione della matrice  $\gamma^5$ , con cui costruire le correnti assiali coinvolte nell'anomalia alla base della rottura spontanea di simmetria  $U(1)$  causante la presenza di fotoni massivi. Nell'ambito del progetto di ricerca di studiare la QED a (2+1)-dimensioni, verranno indagate le conseguenze dell'assenza di una rappresentazione chirale.

Nel caso  $D = 4$ , i generatori compatibili  $\mathbf{J}^\pm$  possono entrambi etichettare la rappresentazione degli stati con i rispettivi autovalori  $(j_-, j_+)$ , ottenendo le seguenti relazioni per la dimensione  $N = 4$ :

$$(2j_- + 1) + (2j_+ + 1) = 4 \quad \Rightarrow \quad j_- = j_+ = \frac{1}{2},$$

e così permettendo di indicare le singole rappresentazioni irriducibili in somma diretta come  $(\frac{1}{2}, 0)$ , chiamata left-handed, e  $(0, \frac{1}{2})$ , detta right-handed.

Considerando uno spazio in  $D = 2$  la rappresentazione somma diretta ha dimensione  $N = 2$ , che impone  $j_- = j_+ = 0$ , causando la scomparsa del grado di libertà di spin per le componenti left e right-handed. L'attività di ricerca ha proseguito lo studio di tale caso determinando le generiche soluzioni dell'equazione di Dirac attraverso l'implementazione del boost delle soluzioni a riposo ad energia positiva e negativa, ossia autostati della matrice  $\gamma^0$  con autovalori  $\pm 1$ . Tale studio è propedeutico ad affrontare il caso con  $D = 3$ , in cui i fermioni su reticolo si mantengono spinless per il vincolo  $N = 2$ , ma con l'aggiunta di un contributo energetico del campo magnetico.

L'analisi della teoria quantistica relativistica su spazio continuo è stata ultimata con le procedure di seconda quantizzazione riguardanti i campi spinoriali fermionici, finora trattati nel caso libero, ed i campi bosonici per la teoria con interazione.

## GRUPPO DISCRETO DI HEISENBERG

Per attuare lo studio del modello di Schwinger in una singola dimensione spaziale, ho considerato nell'attività di ricerca la versione su reticolo dell'Hamiltoniano della QED [1–3]:

$$\mathcal{H} = -\frac{i}{2a} \sum_x \psi_x^\dagger U_{x,x+1} \psi_x + h.c. + m \sum_x (-1)^x \psi_x^\dagger \psi_x + \frac{g^2 a}{2} \sum_x E_{x,x+1}^2,$$

dove  $a$  è il passo reticolare,  $\psi_x, \psi_x^\dagger$  sono operatori di distruzione e creazione di un fermione che soddisfano la relazione di anticommutazione canonica  $\{\psi_x, \psi_{x'}^\dagger\} = \delta_{x,x'}$ ,  $U_{x,x+1} = e^{-iA_{x,x+1}}$  è detto comparatore di gauge (o connessione), con  $A_{x,x+1}$  potenziale vettore sul link tra i siti  $x$  e  $x+1$ , ed  $E_{x,x+1}$  è il campo elettrico. Potenziale vettore e campo elettrico soddisfano la relazione canonica di commutazione  $[E_{x,x+1}, A_{x',x'+1}] = i\delta_{x,x'}$ . Quest'ultima espressione rappresenta l'algebra alla base del gruppo continuo di Heisenberg per un link fissato, le cui trasformazioni sono definite come operatori di Weyl unitari e fortemente continui nei 2 parametri  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :  $U(\alpha) = e^{i\alpha A}$ ,  $V(\beta) = e^{i\beta E}$  e  $W(\alpha, \beta) = e^{i(\alpha A + \beta E)} = U(\alpha)V(\beta)e^{-\frac{i}{2}\alpha\beta}$ .

Considerando la rappresentazione degli stati su un link  $\varphi(E)$ , in cui il campo elettrico è diagonale, l'azione delle trasformazioni  $V$  è di tipo moltiplicativo,  $V(\beta)\varphi(E) = e^{i\beta E}\varphi(E)$ , mentre l'azione di  $U$  è una traslazione,  $U(\alpha)\varphi(E) = \varphi(E + \alpha)$ .

La necessità di rendere gli spazi di Hilbert associati ai link finito-dimensionali ha comportato l'implementazione di una discretizzazione dello spazio dei parametri con cui costruire il gruppo discreto di Heisenberg-Weyl:

$$\beta \longrightarrow \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \ell, \quad E_{x,x+1} \longrightarrow K_{x,x+1} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \text{diag}\left(-\frac{n-1}{2}, -\frac{n-3}{2}, \dots, \frac{n-3}{2}, \frac{n-1}{2}\right),$$

dove  $\ell \in \mathbb{Z}$ ,  $n$  è la dimensione finita dello spazio di Hilbert associato al link considerato. Il gruppo  $\mathbb{Z}_n$  ottenuto considera le rotazioni degli stati di campo elettrico eseguite da  $U_{x,x+1}$  a seguito di hopping delle cariche per mantenere soddisfatta la legge di Gauss. [2,3]

L'attività di ricerca ha considerato l'estensione di questo approccio a gruppi di Lie non abeliani, in particolare al più semplice caso unitario  $SU(2)$ . All'interno della teoria di Yang-Mills, le variabili di gauge  $A_i = A_{ia} \frac{\sigma_a}{2}$  e  $E_j = E_{jb} \frac{\sigma_b}{2}$ , con  $\sigma_a$  matrici di Pauli ( $a = 1, 2, 3$ ). Vale la relazione di commutazione canonica per  $[A_{ia}, E_{jb}] = i\delta_{ij}\delta_{ab}$ , a partire da cui è stato ricavato il commutatore  $[U_i, E_j]$ , dove  $U_i = e^{-iA_i}$ , passo preliminare per il calcolo del commutatore tra le trasformazioni esponenziate  $e^{-i\alpha_i A_i}$  ed  $e^{i\beta_j E_j}$ .

## TENSOR NETWORK STATES

Se da un lato la scalabilità di un simulatore quantistico permette un aumento esponenziale della potenza di calcolo, bisogna considerare una altrettanto grande richiesta di risorse per poter simulare su computer attuali un tale numero di gradi di libertà. Lo strumento essenziale per limitare questo problema è adoperato nel contesto dei tensor network states per esprimere gli stati in maniera consona all'applicazione di approssimazioni. Tale procedura deriva dalla teoria della probabilità, in particolare dal problema della determinazione degli autovettori della matrice di covarianza, i cui corrispondenti autovalori sono detti valori singolari.

Il sistema più semplice da analizzare in questo formalismo è rappresentato da  $L$  spin disposti nei siti di un reticolo lineare. Lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^L \mathcal{H}_i$  è caratterizzato da uno scaling esponenziale della dimensione  $\dim(\mathcal{H}) = d^L$ . Un generico stato  $|\psi\rangle = \sum_{\sigma} c_{\sigma_1 \dots \sigma_L} |\sigma\rangle$ , con  $|\sigma\rangle = |\sigma_1\rangle \otimes \dots \otimes |\sigma_L\rangle$  base fattorizzata di  $\mathcal{H}$ . Selezionando un link  $\ell$  ( $1 \leq \ell \leq L-1$ ) è possibile definire una bipartizione nei 2 sottosistemi  $\sigma_1, \dots, \sigma_\ell$  e  $\sigma_{\ell+1}, \dots, \sigma_L$ . Riarrangiando il vettore dei coefficienti  $c_{\sigma_1 \dots \sigma_L}$  come una matrice con  $\ell$  righe associate agli indici del primo sottosistema A ed  $L - \ell$  colonne per il secondo B, si applica la SVD, che porta all'espansione  $c_{(\sigma_1 \dots \sigma_\ell), (\sigma_{\ell+1} \dots \sigma_L)} = \sum_{a_\ell=1}^r U_{(\sigma_1 \dots \sigma_\ell), a_\ell} S_{a_\ell, a_\ell} V_{a_\ell, (\sigma_{\ell+1} \dots \sigma_L)}^\dagger$ , con  $r$  numero di valori singolari  $s_{a_\ell}$  non nulli, detto rango (o ordine [6]), ottenendo la corrispondente decomposizione di Schmidt:

$$|\psi\rangle = \sum_{\sigma} \sum_{a_\ell=1}^r U_{(\sigma_1 \dots \sigma_\ell), a_\ell} S_{a_\ell, a_\ell} V_{a_\ell, (\sigma_{\ell+1} \dots \sigma_L)}^\dagger |\sigma\rangle = \sum_{a_\ell=1}^r s_{a_\ell} |a_\ell\rangle_A |a_\ell\rangle_B,$$

dove  $|a_\ell\rangle_A = \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_\ell} U_{(\sigma_1 \dots \sigma_\ell), a_\ell} |\sigma_1 \dots \sigma_\ell\rangle$ ,  $|a_\ell\rangle_B = \sum_{\sigma_{\ell+1} \dots \sigma_L} V_{a_\ell, (\sigma_{\ell+1} \dots \sigma_L)}^\dagger |\sigma_{\ell+1} \dots \sigma_L\rangle$ . Si ottengono così i valori singolari come radici quadrate degli autovalori della matrice densità ridotta.

Tale procedura può essere implementata in modo iterativo sito per sito, dove ad ogni step nella partizione A si pone  $U_{(a_\ell \sigma_{\ell+1}), a_{\ell+1}} = A_{a_\ell, a_{\ell+1}}^{\sigma_{\ell+1}}$  mentre in B  $V_{a_\ell, (\sigma_{\ell+1} a_{\ell+1})}^\dagger = B_{a_\ell, a_{\ell+1}}^{\sigma_{\ell+1}}$ , così ottenendo la formulazione in MPS per un reticolo con open boundary conditions (OBC):

$$|\psi\rangle = \sum_{\sigma} \sum_{a_1 \dots a_{L-1}} A_{1, a_1}^{\sigma_1} \dots A_{a_{L-1}, a_L}^{\sigma_L} S_{a_\ell, a_\ell} B_{a_\ell, a_{\ell+1}}^{\sigma_{\ell+1}} \dots B_{a_{L-1}, 1}^{\sigma_L} |\sigma\rangle,$$

mentre, nel caso di periodic boundary conditions (PBC), è necessario effettuare la traccia sul prodotto di matrici. [5, 7]

Dal punto di vista della richiesta di risorse computazionali, ad ogni iterazione, riguardante il sito  $\ell$ -simo, può essere applicato un cut-off sui valori singolari,

considerandone  $D_\ell \leq r_\ell$ : in questo modo i tensori  $A^{\sigma_\ell} \in \mathbb{C}^{D_{\ell-1} \times d \times D_\ell}$ , costituenti la forma MPS, forniranno un'approssimazione dello stato originario.

Per poter comprendere il vantaggio di tale approccio, nel corso dell'attività di ricerca ho indagato la formulazione degli operatori agenti su questa espressione degli stati, detti *matrix product operator* (MPO). Come esempio è stato considerato l'Hamiltoniano del modello di Heisenberg agente su spin  $\frac{1}{2}$ , quindi con  $d = 2$ ,  $\mathcal{H} = W^{[1]}W^{[2]} \dots W^{[L]}$  per OBC, dove  $W_{b,b'} = \sum_{\sigma,\sigma'} W_{b,b'}^{\sigma,\sigma'} |\sigma\rangle \langle \sigma'|$  ( $1 \leq b, b' \leq 5$ ) sono matrici a valori operatoriali, la cui dimensione è dipendente dalle possibili interazioni. L'azione locale di questo tipo di operatori sulle matrici associate a ciascun sito è  $\sum_{\sigma'_\ell} W_{b_{\ell-1}, b_\ell}^{\sigma_\ell, \sigma'_\ell} A_{a_{\ell-1}, a_\ell}^{\sigma'_\ell} = N_{(b_{\ell-1} a_{\ell-1}), (b_\ell a_\ell)}^{\sigma_\ell}$ , così permettendo il calcolo dei valori d'attesa  $\langle \psi | \mathcal{H} | \psi \rangle$  necessari alla ricerca dei ground state. Come previsto dalla procedura DMRG, si considera un problema agli autovalori generalizzato sul sito tra le 2 partizioni A e B, traslando di un sito il confine tra esse ad ogni iterazione nei cosiddetti sweep, finchè non si raggiunge l'accuratezza desiderata. [5]

La forma MPO dell'Hamiltoniano per una catena di spin con periodic boundary condition presenta 2 tipi di matrici,  $W^{[1]}$  associata al primo sito e  $W^{[i]}$  per  $2 \leq i \leq L$ . In questo caso si ha  $\mathcal{H} = \text{Tr}\{W^{[1]}W^{[2]} \dots W^{[L]}\}$ . E' stata investigata la possibilità di ottenere l'espressione dell'Hamiltoniano utilizzando prodotti di matrici identiche in forma: per semplicità è stato considerato l'Hamiltoniano di Ising. Tale procedura è stata verificata come possibile per un reticolo lineare con al massimo  $L = 5$  siti per una  $W$  di ordine 3: aumentando l'ordine degli MPO è possibile includere ad esempio interazioni ai secondi vicini [5], per cui ciò permetterebbe di incrementare la lunghezza  $L$  del reticolo.

L'interesse per il modello di spin deriva dalla trasformazione di Jordan-Wigner per gli operatori fermionici presenti nell'Hamiltoniano del modello di Schwinger  $\psi_n = \prod_{\ell < n} (i\sigma_\ell^z) \sigma_n^-$ ,  $\psi_n^\dagger = \prod_{\ell < n} (-i\sigma_\ell^z) \sigma_n^+$ :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2a} \sum_n \sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- + h.c. + \frac{m}{2} \sum_n (-1)^n \sigma_n^z + \frac{g^2 a}{8} \sum_n \left( \sum_{m=1}^n [\sigma_m^z + (-1)^m] \right)^2,$$

dove per chiarezza l'intero  $x$  dell'Hamiltoniano per la QED è stato sostituito da  $n$ , con scomparsa del comparatore per la trasformazione di gauge  $\sigma_n^- \longrightarrow \left( \prod_{\ell < n} U_{\ell, \ell+1} \right) \sigma_n^-$  ed espressione del campo elettrico ricavata attraverso la legge di Gauss. Anche se ora i campi di gauge non appaiono più esplicitamente, essi generano un'interazione a lungo raggio non locale corrispondente all'interazione di Coulomb tra le particelle cariche simulate. [1]

Per poter usufruire di codici open source già ottimizzati adoperanti il formalismo MPS, è stata utilizzata la macchina virtuale *Tensor Network Theory* (TNT). Tale pacchetto di algoritmi offre una ampia possibilità di scelta tra gli

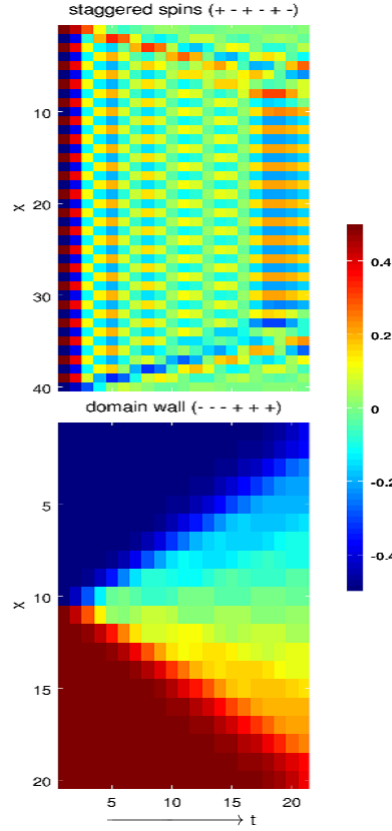


Figura 1: Evoluzione temporale di una catena di spin generata da un Hamiltoniano senza interazione lungo l'asse  $z$  e con campo esterno costante su tutti i siti lungo  $z$ , a sinistra si alternano spin up - spin down, mentre a destra sono nella parte superiore inizialmente down e up nell'altra.

Hamiltoniani per sistemi strettamente unidimensionali riguardanti sistemi di spin o bosonici. In Fig. 1 sono mostrate le evoluzioni temporali di 2 catene di spin soggette ad una differente tipologia di condizioni iniziali, settate come argomento di input in uno script in cui sono state specificate anche le flag riguardanti i termini presenti nell'Hamiltoniano desiderato. Ottenuto ciò, l'algoritmo `tntEvolve` considera i termini energetici  $h_{ij}$ , legati al campo esterno ed alle interazioni tra primi vicini, per poter effettuare l'espansione di Suzuki-Trotter del propagatore. Ad istanti di tempo successivi vengono sottoposte all'evoluzione temporale coppie adiacenti di spin in sweep del tutto analoghi a quelli usati nella ricerca dei ground state.

La necessità di estendere l'analisi al caso di reticolo bidimensionale ha indotto a ricercare un'espressione analoga alla tipologia MPO, che è stata chiamata *projected entangled pair operator* (PEPO) sulla base della scarsissima letteratura



disponibile. A partire da un reticolo  $2 \times 3$  ho costruito un Hamiltoniano PEPO per plaquette cilindrica, cioè con PBC su un solo lato, e toroidale, seguiti dai casi di reticolo  $2 \times 3$  con PBC su entrambi i lati, dal caso  $3 \times 3$  con OBC, cilindrico e toroidale. A partire da ciò è emersa l'influenza derivante dalla non commutatività del prodotto tensoriale, producendo una forma dipendente dall'ordine dei label per i siti su reticolo, che rappresenta un ostacolo all'espressione di un Hamiltoniano nel limite termodinamico di siti. Questo tipo di espressione per operatori è applicabile ai PEPS sulla cui struttura verrà concentrata l'attenzione dell'attività di ricerca: lo strumento consistente nella higher order SVD (HOSVD) [6] permette al più di ottenere i cosiddetti grafi ad albero, ma la natura multipartita dell'entanglement su reticoli a dimensione maggiore dei casi lineari ostacola una diretta estensione del formalismo MPS basato sulla decomposizione di Schmidt.

## ATTIVITÀ DIDATTICHE

Parallelamente alle attività di ricerca sono state frequentati i seguenti corsi:

- How to prepare a technical speech in English;
- Gestione ricerca e conoscenza dei sistemi di ricerca europei ed internazionali, valorizzazione risultati della ricerca, proprietà intellettuale;
- C++ programming;
- Python programming;
- Renormalization of field theories;
- Lévy processes and applications;
- Introduction to parallel Computing and GPU Programming using CUDA;
- Topics in Random Matrix Theory.

Inoltre nel periodo compreso tra il 15 ed il 26 maggio ho partecipato alla "26th Summer School on Parallel Computing" tenuta presso il CINECA in Casalecchio di Reno (Bologna).

# Bibliografia

- [1] Martinez E. A., Muschik C. A., Schindler P., Nigg D., Erhard A., Heyl M., Hauke P., Dalmonte M., Monz T., Zoller P., Blatt R.; *Real-time dynamics of lattice gauge theories with a few-qubit quantum computer*, Nature 534, 516-519 (2016)
- [2] Notarnicola S., Ercolessi E., Facchi P., Marmo G., Pascazio S., Pepe F. V.; *Discrete Abelian gauge theories for quantum simulations of QED*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 48, 1-12 (2015)
- [3] Ercolessi E., Facchi P., Magnifico G., Pascazio S., Pepe F. V.; *Quantum simulation of QED in 1D: evidence of a phase transition*, arXiv:quant-ph/1705.11047 (2017)
- [4] White S. R.; *Density matrix formulation for quantum renormalization groups*, Physical Review L 69, 2863-2866 (1992)
- [5] Schollwöck U.; *The density-matrix renormalization group in the age of matrix product states*, Annals of Physics 326, 96–192 (2011)
- [6] De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J.; *A multilinear singular value decomposition*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications Vol. 21, No. 4, 1253–1278 (2000)
- [7] Orùs R.; *A practical introduction to tensor networks: matrix product states and projected entangled pair states*, Annals of Physics 349, 117–158 (2014)
- [8] Yang D., Shankar Giri G., Johanning M., Wunderlich C., Zoller P., Hauke P.; *Analog quantum simulation of (1+1)-dimensional lattice QED with trapped ions*, Physical Review A 94, 1-19 (2016)