

# RELAZIONE ATTIVITÀ DI RICERCA

DOMENICO POMARICO - II ANNO

SUPERVISOR: PROF. SAVERIO PASCAZIO, DOTT. FRANCESCO V. PEPE

INTRODUZIONE . . . . .	1
EMISSIONE CORRELATA DI DUE ATOMI ECCITATI . . . . .	2
ESTENSIONE AL CASO DI MOLTI ATOMI . . . . .	7
CONFERENZE . . . . .	9

## INTRODUZIONE

L'ambito della ricerca programmata nel corso del secondo anno di dottorato si contestualizza principalmente in waveguide QED. Tale studio è la prosecuzione di quanto già avviato lo scorso anno, concernente la dinamica di due atomi a due livelli in interazione dipolare con il campo elettromagnetico ed in un sistema di riferimento unidimensionale. [1,2] Nei setup sperimentalmente accessibili gli atomi potrebbero essere dei quantum dot, il cui semiasse maggiore è allineato alla direzione di oscillazione del campo elettrico, in modo da poter accoppiare la migrazione di carica su di essi e rendere valida la loro rappresentazione di dipolo.

Nel modello la conservazione del numero di eccitazioni è ottenuta attraverso l'approssimazione di onda rotante, così causando la suddivisione dello spazio di Hilbert ospitante i gradi di libertà del sistema in settori. Nel settore ad una eccitazione è stata determinata la condizione necessaria alla generazione di entanglement tra i due atomi, corrispondente a valori di risonanza della loro mutua distanza rispetto la lunghezza d'onda del fotone associato all'energia d'eccitazione degli atomi. In quest'ultimo settore il modello è detto di Friedrichs-Lee, dotato di una self-energy ottenibile con l'approccio da serie geometrica di Dyson. [2]

L'estensione al settore con due eccitazioni provoca la perdita di tale forma compatta: è stata ricavata un'espressione analitica della self-energy necessaria alla rinormalizzazione del propagatore per lo stato con entrambi gli atomi eccitati,

ma dal punto di vista computazionale è stato richiesto l'utilizzo di approssimazioni per ovviare alla presenza di uno stato legato nel canale di decadimento a doppio fotone. La trattazione di tale ampiezza in teoria non perturbativa ha rivelato effetti che l'approccio perturbativo non permette di prevedere, con forte influenza dalla self-energy anche nel limite di basso accoppiamento, cioè la cui scala di energia è piccola rispetto quella relativa l'energia d'eccitazione degli atomi. In questa condizione è stato possibile prevedere l'emissione di fotoni con direzione correlata in corrispondenza di atomi a distanza di antirisonanza. [3]

Gli ulteriori sviluppi dell'attività di ricerca hanno riguardato l'estensione del modello ad un numero generico di atomi a due livelli nel settore ad una eccitazione. L'incremento nel numero di gradi di libertà atomici ha permesso di caratterizzare il ruolo dell'approssimazione di Weisskopf-Wigner [1] nel delineare come stati stazionari delle configurazioni di condivisione dell'eccitazione da parte degli atomi instabili all'accensione delle code di campo elettromagnetico esponenzialmente soppresse nella coordinata spaziale. Tali code derivano dalla relazione di dispersione delle waveguide, come già ricavato per due qubit per cui la loro inclusione non modifica la stabilità dell'unico autostato a fissata distanza di risonanza, mentre ora ciò ha indotto la ricerca dei tempi di vita media degli stati metastabili. [2,4]

## EMISSIONE CORRELATA DI DUE ATOMI ECCITATI

La descrizione del sistema di atomi ( $S$ ), con stato eccitato  $|e\rangle$  e fondamentale  $|g\rangle$ , in interazione con il bagno di fotoni ( $B$ ), dotati di momento  $k$ , creati e distrutti da  $a(k), a^\dagger(k)$  in commutazione  $[a(k), a^\dagger(k')] = \delta(k - k')$  e appartenenti al primo modo trasversale elettrico della waveguide è data dall'Hamiltoniano:

$$H_d = H_0 + \lambda V_d ,$$

$$H_0 = H_S + H_B = \omega_0 (|e_A\rangle\langle e_A| + |e_B\rangle\langle e_B|) + \int dk \omega(k) a^\dagger(k) a(k) ,$$

esplicitamente parametrizzato sia dalla distanza  $d$  tra i due atomi  $A$  e  $B$  che dalla costante d'accoppiamento  $\lambda$ , associati all'interazione dipolare:

$$V_d = \int dk \left[ (g_0(k)b_A^\dagger + g_d(k)b_B^\dagger) a(k) + h.c. \right] ,$$

dove  $b^\dagger = |e\rangle\langle g|$  e per le waveguide  $g_x(k) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{\omega(k)}}$ , con  $\omega(k) = \sqrt{k^2 + M^2}$  relazione di dispersione dotata di cut-off energetico  $M$  per fotoni propaganti.

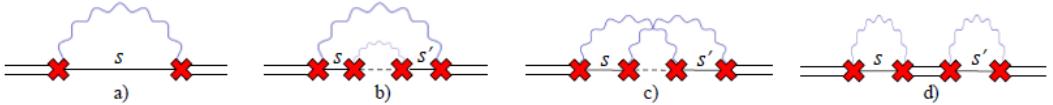


Figura 1: Contributi all’ordine  $V_d^2$  e  $V_d^4$  al propagatore rinormalizzato della doppia eccitazione atomica. Le linee ondulate rappresentano i fotoni, la doppia linea orizzontale il propagatore libero della doppia eccitazione atomica, la singola linea orizzontale con una ondulata la singola eccitazione atomica condivisa di segno  $s$  e un fotone. Le croci rappresentano i vertici di interazione. I processi (b) e (c) preservano il segno  $s$ , mentre in (d)  $s$  e  $s'$  sono arbitrari.

Data la determinazione degli autostati in entanglement nel settore ad una eccitazione  $|\Psi^s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_A, g_B\rangle + s|g_A, e_B\rangle)$ , con  $s = \pm 1$ , è più adatto lavorare in questa base anche nel settore a due eccitazioni, i cui vettori sono nella forma:

$$|\psi\rangle = c_{AB} |e_A, e_B\rangle + \sum_{s=\pm} \int dk B_s(k) |\Psi^s; k\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \int dk_1 dk_2 A(k_1, k_2) |k_1, k_2\rangle,$$

dove  $B_s \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $A \in L^2(\mathbb{R})^{\otimes 2}$  simmetrico per definizione del prodotto tensoriale  $\otimes$ . Questa rotazione nel sottospazio di stati ad un’eccitazione atomica e l’altra sotto forma di fotone comporta un nuovo fattore di forma ruotato nell’interazione dipolare  $g_s(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_0(k) + sg_d(k))$  che, per gli operatori dati dalla trasformazione di Bogoliubov  $b_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_A + sb_B)$ , agisce nella definizione di vertici di interazione che collegano tra loro i propagatori liberi associati alle componenti di  $|\psi\rangle$ .

Applicando l’approccio perturbativo, i primi contributi necessari alla rinormalizzazione del propagatore della doppia eccitazione atomica coinvolti nella definizione dell’associata self-energy legata al metodo del risolvente sono mostrati in Figura 1. Il diagramma (a) di ordine più basso in Figura 1 è utile per stimare l’energia dello stato legato sotto soglia (che chiameremo plasmonico), cioè al di sotto del cut-off  $M$ :

$$E_p \simeq M \left( 1 - \frac{8\pi^2 \lambda^4}{M^2(\omega_0 - M)^2} \right),$$

nel limite di basso accoppiamento questo stato non viene popolato, ma al crescere del valore di  $\lambda$  la sua energia si separa sempre più da  $M$  con una sua crescente popolazione. Nei casi (b) e (c) si ha invece la conservazione della parità  $s$  del propagatore della singola eccitazione atomica poiché  $g_\pm^*(k)g_\mp(k) \propto \sin(kd)$ , ma  $\omega(k) = \omega(-k)$ , per cui nell’integrale si ha una funzione pari per una dispari nei casi in cui cambia la parità, con risultato nullo. Questo vincolo è assente in (d) per l’integrazione su linee fotoniche indipendenti.

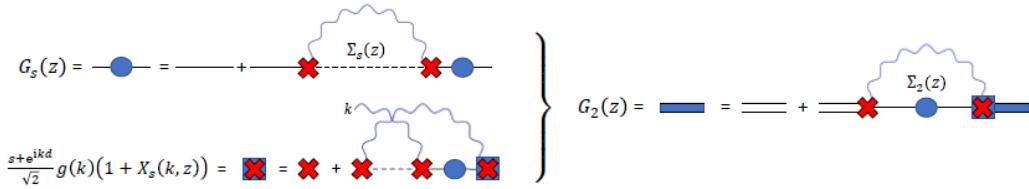


Figura 2: Schema di rinormalizzazione del propagatore della doppia eccitazione atomica  $G_2(z)$ .

I diagrammi (b) e (c) hanno una differenza qualitativa riguardo al fatto che in (b) si ha un'emissione con riassorbimento di un secondo fotone che rinormalizza il propagatore intermedio di singola eccitazione atomica [2] (vedi Figura 2):

$$G_s(z) = \frac{1}{z - \omega_0 - \lambda^2 \Sigma_s(z)} \quad \text{con} \quad \Sigma_s(z) = \int dk \frac{|g_s(k)|^2}{z - \omega(k)},$$

con  $z$  generalizzazione dell'energia sul piano complesso, mentre in (c) il primo fotone è riassorbito prima del secondo, producendo un'intersezione delle linee fotoniche.

Per ottenere il propagatore della doppia eccitazione atomica rinormalizzato:

$$G_2(z) = \langle e_A, e_B | \frac{1}{z - H} | e_A, e_B \rangle = \frac{1}{z - 2\omega_0 - \lambda^2 \Sigma_2(z)},$$

si definisce la self-energy:

$$\Sigma_2(z) = \sum_{s=\pm} \int \frac{dk}{\omega(k)} (1 + s \cos kd) G_s(z - \omega(k)) (1 + X_s(z, k)),$$

dove tutti i diagrammi con una o più intersezioni sono stati interpretati come rinormalizzazione del vertice tra lo stato  $|e_A, e_B\rangle$  e  $|\Psi^s; k\rangle$ , come mostrato in Figura 2:

$$X_s(z, k) = \lambda^2 \int \frac{dq}{\omega(q)} \frac{(1 + s \cos qd)}{z - \omega(k) - \omega(q)} G_s(z - \omega(q)) (1 + X_s(z, q)),$$

ottenibile analiticamente con la soluzione di un'equazione integrale di Fredholm del secondo tipo con kernel non separabile.

Seppure questa espressione analitica del propagatore è esatta, dal punto di vista computazionale non è implementabile nella sua interezza, in quanto è una serie di integrali annidati in numero crescente a causa della definizione ricorsiva del vertice rinormalizzato. Questo problema ha indotto l'indagine

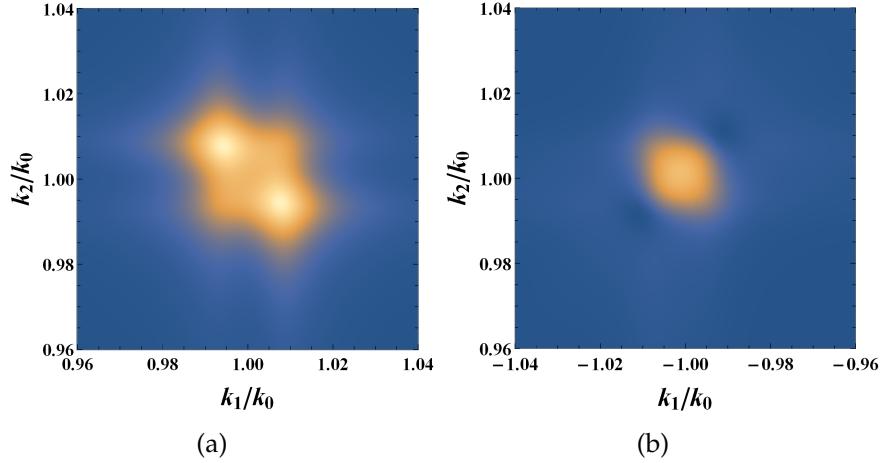


Figura 3: Densità di probabilità nel piano dei momenti  $(k_1, k_2)$ , primo quadrante in (a) e secondo in (b) con parametri  $\omega_0 = 1.1M$ ,  $\lambda = 10^{-2}M$ ,  $k_0d = \frac{\pi}{2}$  da cui  $k_0 \simeq 0.458M$ . Valori crescenti dal blu verso il bianco.

prevalentemente in merito al regime di basso accoppiamento, in cui è possibile troncare la serie ed applicare procedure per la regolarizzazione di divergenze. Lo stato iniziale con entrambi gli atomi eccitati è ottenibile sperimentalmente pompando con un campo esterno su un terzo livello non accoppiato alla waveguide e in rapido decadimento sullo stato eccitato finora considerato. A partire da ciò è stato studiato lo stato asintotico a due fotoni associato al polo reale  $z = \omega(k_1) + \omega(k_2)$  del propagatore libero di doppio fotone, descritto dall'ampiezza:

$$\langle k_1, k_2 | e^{-iHt} | e_A, e_B \rangle = A(k_1, k_2, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathcal{A}(k_1, k_2) e^{-i(\omega(k_1) + \omega(k_2))t},$$

dove  $\mathcal{A}(k_1, k_2)$  presenta due contributi derivanti dagli stati di parità opposta. Nel limite di coupling nullo si può trascurare la rinormalizzazione di vertice  $X_s(z, k)$  ed applicare un'espansione dell'ampiezza nell'intorno dei punti on-shell  $(k_0, k_0)$  e  $(k_0, -k_0)$  per la simmetria nelle coordinate di momento, con  $\omega(k_0) = \omega_0$ : in tale approccio è possibile limitarsi ad utilizzare la sola  $\Sigma_2^{(2)}(z)$  ottenuta dal diagramma (a) di Figura 1.

Diventa così possibile esprimere le ampiezze associate a fotoni emessi con momenti paralleli e opposti, le cui associate densità di probabilità vengono integrate nei rispettivi domini  $D_{\leftrightarrow} = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 | \text{sgn}(k_1) = \text{sgn}(k_2)\}$  e  $D_{\mp} = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 | \text{sgn}(k_1) = -\text{sgn}(k_2)\}$ :

$$P_{\leftrightarrow} = \frac{1}{2} \int_{D_{\leftrightarrow}} dk_1 dk_2 |\mathcal{A}(k_1, k_2)|^2, \quad P_{\mp} = \frac{1}{2} \int_{D_{\mp}} dk_1 dk_2 |\mathcal{A}(k_1, k_2)|^2,$$

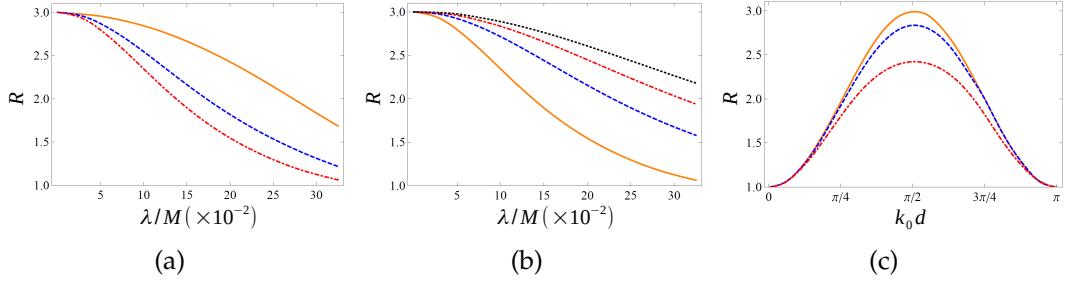


Figura 4: Andamenti del rapporto  $R = P_{\leftrightarrow}/P_{\mp\mp}$  in condizioni differenti. In (a) è mostrata la dipendenza, a fissato  $\omega_0 = 1.1M$ , da  $d = \frac{\pi}{2k_0}$  (curva arancione),  $d = \frac{3\pi}{2k_0}$  (curva tratteggiata blu) e  $d = \frac{5\pi}{2k_0}$  (curva tratteggiata rossa). In (b) si è fissata la condizione di antirisonanza facendo variare  $\omega_0 = 1.1M$  (curva arancione),  $\omega_0 = 1.2M$  (curva tratteggiata blu),  $\omega_0 = 1.3M$  (curva tratteggiata rossa),  $\omega_0 = 1.4M$  (curva tratteggiata nera). In (c) è stata variata la costante d'accoppiamento, a fissato  $\omega_0 = 1.1M$ ,  $\lambda = 10^{-3}M$  (curva arancione),  $\lambda = 10^{-2}M$  (curva tratteggiata blu),  $\lambda = 2 \times 10^{-2}M$  (curva tratteggiata rossa).

così permettendo la definizione del rapporto di probabilità in Figura 4:

$$R(\lambda) \Big|_{\lambda \rightarrow 0} = \frac{P_{\leftrightarrow}}{P_{\mp\mp}} = 1 + 2 \sin^2 k_0 d,$$

analitico nel solo limite. Per lo studio di regimi di coupling superiori si deve considerare il primo contributo in  $X_s(z, k)$ , che viene approssimato con l'espansione della self-energy secondo la procedura di Breit-Wigner. In questo modo si ottiene la distribuzione dei momenti raffigurata in Figura 3 in cui sono manifesti gli effetti di interferenza tra le ampiezze di emissione associate a stati di parità differente alla base del rapporto  $R$ . In questi regimi di coupling diventano più visibili i due picchi nei quadranti per momenti paralleli, la cui causa risiede nel differente segno della self-energy usata per il propagatore della singola eccitazione atomica, quindi di natura non-perturbativa. Il rapporto  $R$  in questo caso corrisponde al punto di ascissa  $k_0 d = \frac{\pi}{2}$  della curva tratteggiata blu in Figura 4 (c), quindi prossimo a 3. I picchi di quest'ultimo grafico in corrispondenza di tale ascissa sono punti appartenenti alla curva arancione di Figura 4 (a), in cui si evince che l'aumento della distanza ha l'effetto di accoppiamento maggiore per la descrescita più rapida del rapporto legata alla maggiore popolazione dello stato legato plasmonico. Nel pannello (b) è possibile verificare che tali effetti sono limitabili attraverso l'incremento del valore di  $\omega_0$ , che effettivamente risulta come un tendere ad accoppiamenti minori. Sperimentalmente la popolazione dello stato legato plasmonico po-

trebbe essere usata come filtro sul numero di fotoni in output nello studio del fenomeno di scattering per stati iniziali con fotoni.

## ESTENSIONE AL CASO DI MOLTI ATOMI

La dinamica dei sistemi atomici a due livelli è stata generalizzata ad un loro numero arbitrario. L'Hamiltoniano precedentemente adoperato ha una diretta estensione per il caso multiqubit:

$$H = \sum_{j=1}^N \omega_0 b_j^\dagger b_j + \int dk \omega(k) a^\dagger(k) a(k) + \lambda \sum_{j=1}^N \int dk (g_{x_j}(k) b_j^\dagger a(k) + h.c.),$$

dove nel caso di reticolo unidimensionale regolare si ha  $x_j = (j-1)d$ , cioè con tutti i qubit equamente spaziati.

Lo studio dell'equazione agli autovalori di questo Hamiltoniano nel settore ad una eccitazione conduce ad una diretta generalizzazione della self-energy determinata per il caso di due qubit [2, 4], ora matrice  $N \times N$ :

$$\Sigma_{jl}(z) = \int dk \frac{g_j^*(k) g_l(k)}{z - \omega(k)} = 2\pi i \frac{e^{-i(j-l)\sqrt{z^2 - M^2}d}}{\sqrt{z^2 - M^2}} - \beta_{|j-l|}(z),$$

dove il primo termine è ottenuto da residui con  $\text{Re}\{z\} > 0$ , mentre il secondo è un contributo di taglio:

$$\beta_{|j-l|}(z) = 2z \int_M^\infty dq \frac{e^{-|j-l|qd}}{\sqrt{q^2 - M^2}(z^2 + q^2 - M^2)}.$$

Esprimendo con  $\mathbf{c} = (c_1 \dots c_N)^T$  l'array di ampiezze per atomo in stato eccitato, si ottiene il sistema:

$$((\omega_0 - E)\mathbb{1} - \Sigma(E + i0^+)) \cdot \mathbf{c} = 0,$$

dove  $\mathbb{1}$  è la matrice identità  $N \times N$  ed  $E \in \mathbb{R}$  è autovalore.

Restringendo l'attenzione ad autovalori  $E > M$ , si può trascurare i contributi di taglio nel limite di grande  $M$ , dato che  $\beta_j(z) = O(e^{-jMd})$ : in questa approssimazione si ottiene come condizione di singolarità del sistema  $\sqrt{E^2 - M^2}d = n\pi$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , ossia la condizione di risonanza già caratterizzata per due atomi. Anche la decomposizione nei settori di parità viene generalizzata, ottenendo dei vincoli rispettivamente per  $n$  dispari e pari:  $\sum_j (-1)^{j-1} c_j = 0$  e  $\sum_j c_j = 0$ , che definiscono i sottospazi  $N - 1$  dimensionali in cui vivono gli autostati a fissata distanza  $d$  di risonanza.

Considerare il solo contributo di residuo nella self-energy corrisponde all'approssimazione di Weisskopf-Wigner, ma se si includono i contributi di taglio vengono accese le code esponenziali per il campo elettromagnetico, le quali causano la perdita dal set di autostati, obbedienti ai vincoli presentati, di tutte le configurazioni non simmetriche (o antisimmetriche) rispetto al centro della catena di atomi.

Questi stati sono metastabili, cioè, seppure non stazionari, dotati di un tempo di vita media di ordine  $O(\lambda^{-2})$  legato alla parte immaginaria degli associati poli, i quali vengono determinati attraverso la condizione di singolarità per il sistema dedotto dal problema agli autovalori con i prolungamenti analitici della self-energy sul secondo foglio di Riemann.

La caratterizzazione dei contributi di taglio  $\beta_{|j-l|}(z)$ , esponenzialmente soppressi con un ordine crescente insieme alla distanza dalla diagonale principale, permette di troncare in modo perturbativo il loro massimo indice da includere: in questo modo è stato possibile considerare interazioni locali dovute alle code esponenziali tra atomi primi vicini e secondi vicini. A partire da ciò è stata ottenuta una prova per induzione per le equazioni associate al determinante nullo della matrice dei coefficienti del sistema per le ampiezze  $c$  di atomi eccitati: la loro forma è stata dapprima ricavata per via numerica ed in seguito verificata analiticamente. Troncando le interazioni di coda ai soli primi vicini è stato ricavato in questo modo che lo stato instabile, non soddisfacente il vincolo per appartenere al sottospazio  $N - 1$  dimensionale degli autostati, presenta un rate di decadimento proporzionale al numero  $N$  di atomi.

La stessa procedura è stata applicata considerando i contributi di taglio fino a secondi vicini, in modo da ottenere lo spostamento del polo dall'asse reale associato al primo stato metastabile:

$$\frac{\gamma}{2} \simeq \lambda^2 \frac{2(N-2)}{3N^3} \beta_1(\omega_0),$$

rappresentante approssimativamente metà del rate di decadimento. Dal punto di vista sperimentale la conoscenza di ciò potrebbe permettere di avere informazioni sulla perdita degli atomi agli estremi della catena sulla base della modifica dei tempi di vita media. [4]

L'estensione al caso multiquibit ha avuto ulteriori sviluppi in merito al modificare la natura di waveguide lineare in una circolare, così modificando profondamente lo spettro del campo elettromagnetico da continuo a discreto. Tale modifica ha permesso di caratterizzare il nuovo sistema non più includente possibili dissipazioni, le quali possono essere riottenute nel limite lineare. [5]

## **CONFERENZE**

Nel corso del secondo anno di dottorato vi è stata la partecipazione alle seguenti conferenze e summer school:

- "Statistical Mechanics & Field Theory", conferenza tenutasi presso Bari con partecipazione alla fase di registrazione degli ospiti;
- "Problemi Attuali di Fisica Teorica", conferenza tenutasi presso Vietri sul mare con preparazione di un talk;
- "Information Geometry, Quantum Mechanics and Applications", conferenza tenutasi presso San Rufo-Policeta con preparazione di un talk;
- "Collective behavior in quantum matter", summer school tenutasi presso ICTP (Trieste) con preparazione di un poster.

# Bibliografia

- [1] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, *Atom-Photon Interaction: Basic Processes and Applications* (1998).
- [2] P. Facchi, M. S. Kim, S. Pascazio, F. V. Pepe, D. Pomerico and T. Tufarelli, Phys. Rev. A **94**, 043839 (2016).
- [3] P. Facchi, S. Pascazio, F. V. Pepe and D. Pomerico, in submission (2018).
- [4] P. Facchi, D. Lonigro, S. Pascazio, F. V. Pepe and D. Pomerico, in preparation (2018).
- [5] P. Facchi, D. Lonigro, S. Pascazio, F. V. Pepe and D. Pomerico, in preparation (2018).