

# **RELAZIONE ATTIVITÀ DI RICERCA**

**DOMENICO POMARICO**

**SUPERVISOR: PROF. SAVERIO PASCAZIO, DOTT. FRANCESCO V. PEPE**

INTRODUZIONE . . . . .	1
SISTEMI DI QUBIT UNIDIMENSIONALI . . . . .	2
EMISSIONE CORRELATA DI FOTONI . . . . .	4
ALCUNI ESEMPI . . . . .	6
ONDE DI SPIN E MULTIMERIZZAZIONE . . . . .	7
CONFERENZE . . . . .	10

## **INTRODUZIONE**

L'ambito della ricerca programmata si contestualizza principalmente in elettrodinamica quantistica di guida d'onda, ambito di intensa ricerca sperimentale, ma i risultati ottenuti sono applicabili anche ad altri sistemi, come ad esempio le trappole ioniche lineari. La generalità dell'approccio si fonda sul considerare la dinamica di atomi a due livelli in interazione dipolare con un campo bosonico ed in un sistema di riferimento unidimensionale. [2] Nei setup sperimentalmente accessibili di elettrodinamica quantistica di guida d'onda gli atomi possono essere artificiali come dei quantum dot, rappresentabili come ellissoidi il cui semiasse maggiore è allineato alla direzione di oscillazione del campo elettrico, in modo da poter accoppiare la migrazione di carica su di essi e rendere valida la loro rappresentazione di dipolo, oppure superconduttori ad anello, immersi in un campo magnetico che renda degeneri dal punto di vista energetico due correnti in verso opposto.

Nel modello la conservazione del numero di eccitazioni è ottenuta attraverso l'approssimazione di onda rotante, così causando la suddivisione dello spazio di Hilbert ospitante i gradi di libertà del sistema in settori. Nel settore ad una eccitazione è stata determinata la condizione necessaria alla generazione di entanglement tra due atomi, corrispondente a valori di risonanza della

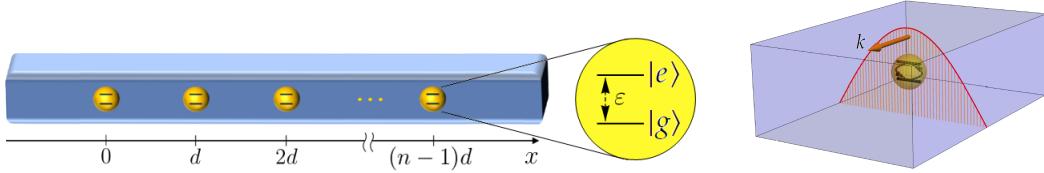


Figura 1: Rappresentazione della guida d'onda a sezione rettangolare in cui sono posti gli  $n$  sistemi a due livelli equamente spaziati da una distanza  $d$  e del coupling con il primo modo trasversale elettrico, con  $k$  momento dei fotoni.

loro mutua distanza rispetto la lunghezza d'onda del fotone associato all'energia d'eccitazione degli atomi. In quest'ultimo settore il modello è detto di Friedrichs-Lee, dotato di una self-energy ottenibile con l'approccio da serie geometrica di Dyson. [2]

L'estensione al settore con due eccitazioni provoca la perdita di tale forma compatta: è stata ricavata un'espressione analitica della self-energy necessaria alla rinormalizzazione del propagatore per lo stato con entrambi gli atomi eccitati, ma dal punto di vista computazionale è stato richiesto l'utilizzo di approssimazioni per ovviare alla presenza di uno stato legato nel canale di decadimento a doppio fotone. La trattazione di tale ampiezza con il propagatore risommato ha rivelato effetti che l'approccio perturbativo non permette di prevedere, con forte influenza dalla self-energy anche nel limite di basso accoppiamento, cioè la cui scala di energia è piccola rispetto quella relativa l'energia d'eccitazione degli atomi. In questa condizione è stato possibile prevedere l'emissione di fotoni con direzione correlata in corrispondenza di atomi a distanza di antirisonanza. [3]

Gli ulteriori sviluppi dell'attività di ricerca hanno riguardato l'estensione del modello ad un numero generico di atomi a due livelli nel settore ad una eccitazione. L'incremento nel numero di gradi di libertà atomici è lineare in tale settore, anche se l'autosistema ottenuto ha rivelato una descrizione che ha richiesto molteplici strumenti algebrici. [2,4,5]

## SISTEMI DI QUBIT UNIDIMENSIONALI

Il sistema quantistico in oggetto si compone di  $n$  qubit, caratterizzati da un gap energetico  $\epsilon$  tra lo stato eccitato  $|e\rangle$  e lo stato fondamentale  $|g\rangle$ , sistemati all'interno di una guida d'onda a sezione rettangolare che rappresenta l'embedding unidimensionale, in quanto i fotoni possono propagarsi solo in una direzione, ed equidistanziati tra loro di uno spacing  $d$  mostrato in Figura 1. La relazione di dispersione del primo modo trasversale elettrico che verrà consi-

derato è  $\omega(k) = v \sqrt{k^2 + (\pi/L_y)^2}$ , dove  $v$  è la velocità di propagazione dei fotoni nella guida,  $k$  il loro numero d'onda ed  $L_y$  la lunghezza del lato maggiore della sezione rettangolare, lungo cui questo modo ha oscillazione con  $\lambda/2 = L_y$ . In seguito lavoreremo in unità naturali, con  $v = 1$  ed il cutoff energetico del modo sarà indicato con  $m = \pi/L_y$ . Il modello considera l'accoppiamento con il solo primo modo, approssimazione valida per  $d$  sufficientemente grandi da mantenere gli autovalori al di sotto del cutoff per il modo successivo. [2]

Applicando la quantizzazione del campo elettromagnetico e la procedura di minimal coupling [2], si ottiene la definizione di un fattore di forma che pesi l'accoppiamento dei sistemi a due livelli con il bagno strutturato. In questo modo si ottiene l'espressione dell'Hamiltoniano totale  $H = H_0 + H_{\text{int}}$ :

$$H_0 = \varepsilon \sum_{j=1}^n |e_j\rangle \langle e_j| + \int dk \omega(k) b^\dagger(k) b(k),$$

$$H_{\text{int}} = \sum_{j=1}^n \int dk \left[ F(k) e^{i(j-1)kd} |e_j\rangle \langle g_j| b(k) + h.c. \right],$$

dove  $[b(k), b^\dagger(k')] = \delta(k - k')$ , mentre  $F(k) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi\omega(k)}}$  è il fattore di forma, in cui  $\gamma$  è la costante di accoppiamento che determina il rate di decadimento di un qubit inizialmente eccitato.

Definendo l'operatore numero di eccitazioni  $\mathcal{N} = |e_j\rangle \langle e_j| + \int dk b^\dagger(k) b(k)$ , si verifica la presenza della legge di conservazione  $[H, \mathcal{N}] = 0$ , tali che lo spazio di Hilbert è diviso in settori associati agli autovalori della grandezza conservata. Limitando la nostra attenzione al settore di singola eccitazione  $\mathcal{N} = 1$ , gli stati hanno la seguente espressione:

$$|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^n a_j |E_j^{(n)}\rangle \otimes |\text{vac}\rangle + |G^{(n)}\rangle \otimes \int dk \xi(k) b^\dagger(k) |\text{vac}\rangle,$$

con  $|E_j^{(n)}\rangle = \bigotimes_{\ell=1}^{j-1} |g_\ell\rangle \otimes |e_j\rangle \bigotimes_{\ell=j+1}^n |g_\ell\rangle$ ,  $|G^{(n)}\rangle = \bigotimes_{\ell=1}^n |g_\ell\rangle$ ,  $a_j \in \mathbb{C}$  e  $\xi \in L^2(\mathbb{R})$  e  $|\text{vac}\rangle$  rappresenta lo stato di vuoto per il campo elettromagnetico.

L'equazione agli autovalori fornisce come soluzione la definizione del kernel del propagatore inverso:

$$G_n^{-1}(E) = (E - \varepsilon) \mathbb{1}_n - \Sigma(E), \quad \ker \{G_n^{-1}(E)\} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n | G^{-1}(E)\mathbf{a} = 0\},$$

dove  $\mathbb{1}_n$  è la matrice identità  $n \times n$ , mentre  $\Sigma(E)$  è la matrice di self-energy in forma di Toeplitz-Hankel con  $E$  autovalore:

$$\Sigma_{jl}(E \pm i0) = \frac{\pm i\gamma}{\bar{k}(E)} \left( e^{\pm i|j-l|\bar{k}(E)d} \pm i b_{|j-l|}(E) \right),$$

risultante dall'integrazione sul piano complesso dell'energia con primo termine derivante dai poli in  $k = \pm \bar{k}(E) = \pm \sqrt{E^2 - m^2}$  ed il secondo dai tagli:

$$b_j(E) = \frac{\bar{k}(E)}{\pi} \int_m^\infty dy \frac{e^{-jyd}}{\sqrt{y^2 - m^2}} \frac{E}{E^2 + y^2 - m^2}.$$

In generale, gli autosistemi associati a matrici di Toeplitz, con ciascuna diagonale discendente da sinistra a destra costante, sono detti centro-simmetrici, in quanto l'applicazione di trasformazioni nella seguente forma:

$$\mathcal{U}_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_h & \mathbb{J}_h \\ \mathbb{J}_h & -\mathbb{1}_h \end{pmatrix} \quad \mathcal{U}_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_h & 0 & \mathbb{J}_h \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \mathbb{J}_h & 0 & -\mathbb{1}_h \end{pmatrix},$$

per rispettivamente  $n = 2h$  e  $n = 2h+1$ , consentendo di ottenere una decomposizione in blocchi diagonali, dove  $\mathbb{J}_h$  è la matrice di riflessione  $h \times h$ , composta da elementi pari ad 1 sull'anti-diagonale da destra a sinistra.

Questa caratterizzazione si traduce nel nostro sistema nella simmetria di parità, così caratterizzante gli autostati in simmetrici ed antisimmetrici, associati ai kernel derivanti dalla seguente decomposizione del propagatore:

$$\mathcal{U}_n G_n(E) \mathcal{U}_n^\dagger = G_{\lceil n/2 \rceil}^+(E) \oplus G_{\lfloor n/2 \rfloor}^-(E),$$

da cui si ricavano due differenti equazioni  $\det C^\pm(E) = 0$  per la condizione di singolarità determinante gli autovalori, rispettivamente di grado  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  e  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Nel caso in cui si trascurino tutti i contributi di taglio  $b_j$  della self-energy, in pratica si assume di ignorare tutti gli effetti di distanza  $d$  finita e si ottiene la comune descrizione di sottospazi stabili  $(n-1)$ - volte degeneri in corrispondenza degli autovalori  $E_\nu = \sqrt{\frac{\nu^2 \pi^2}{d^2} + m^2}$ . Tali energie corrispondono fisicamente alla cosiddetta condizione di risonanza dettata da  $\bar{k}(E_\nu)d = \nu\pi$ , cioè corrispondente ad uno spacing  $d$  misurato da  $\frac{\nu}{2}$  lunghezze d'onda della radiazione. [2] Invece l'inclusione dei contributi di taglio ha permesso la caratterizzazione di autopazi non degeneri.

## EMISSIONE CORRELATA DI FOTONI

Per un sistema con  $n = 2$  lo stato iniziale con entrambi gli atomi eccitati è ottenibile sperimentalmente pompando con un campo esterno su un terzo livello non accoppiato alla waveguide e in rapido decadimento sullo stato eccitato finora considerato. A partire da ciò è stato studiato lo stato asintotico

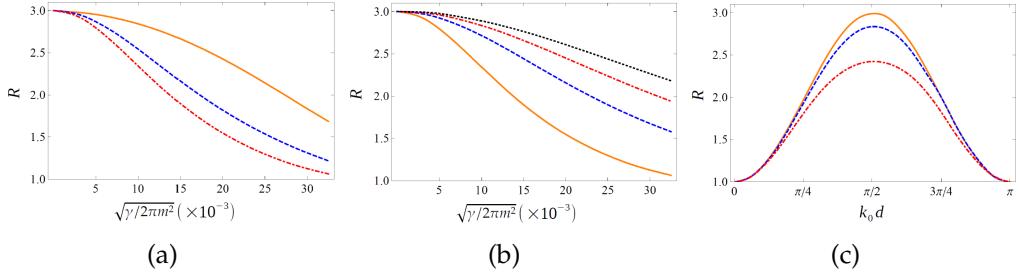


Figura 2: Andamenti del rapporto  $R = P_{\leq} / P_{\geq}$  in condizioni differenti. In (a) è mostrata la dipendenza, a fissato  $\varepsilon = 1.1m$ , da  $d = \frac{\pi}{2k_0}$  (curva arancione),  $d = \frac{3\pi}{2k_0}$  (curva tratteggiata blu) e  $d = \frac{5\pi}{2k_0}$  (curva tratteggiata rossa). In (b) si è fissata la condizione di antirisonanza facendo variare  $\varepsilon = 1.1m$  (curva arancione),  $\varepsilon = 1.2m$  (curva tratteggiata blu),  $\varepsilon = 1.3m$  (curva tratteggiata rossa),  $\varepsilon = 1.4m$  (curva tratteggiata nera). In (c) è stata variata la costante d'accoppiamento, a fissato  $\varepsilon = 1.1m$ ,  $\sqrt{\gamma'/2\pi} = 10^{-3}m$  (curva arancione),  $\sqrt{\gamma'/2\pi} = 10^{-2}m$  (curva tratteggiata blu),  $\sqrt{\gamma'/2\pi} = 2 \times 10^{-2}m$  (curva tratteggiata rossa).

a due fotoni, presentante due contributi derivanti dagli stati di parità opposta. Nel limite di coupling nullo si può trascurare la rinormalizzazione di vertice ed applicare un'espansione dell'ampiezza  $\mathcal{A}(k_1, k_2)$  nell'intorno dei punti on-shell  $(k_0, k_0)$  e  $(k_0, -k_0)$ , dove  $k_0 = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$ , per la simmetria nelle coordinate di momento. Diventa così possibile esprimere le ampiezze associate a fotoni emessi con momenti paralleli e opposti, le cui associate densità di probabilità vengono integrate nei rispettivi domini  $D_{\leq} = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 | \text{sgn}(k_1) = \text{sgn}(k_2)\}$  e  $D_{\geq} = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 | \text{sgn}(k_1) = -\text{sgn}(k_2)\}$ :

$$P_{\leq} = \frac{1}{2} \int_{D_{\leq}} dk_1 dk_2 |\mathcal{A}(k_1, k_2)|^2, \quad P_{\geq} = \frac{1}{2} \int_{D_{\geq}} dk_1 dk_2 |\mathcal{A}(k_1, k_2)|^2,$$

così permettendo la definizione del rapporto di probabilità in Figura 2:

$$R(\lambda) \Big|_{\lambda \rightarrow 0} = \frac{P_{\leq}}{P_{\geq}} = 1 + 2 \sin^2 k_0 d,$$

analitico nel solo limite. Per lo studio di regimi di coupling superiori si deve considerare la rinormalizzazione di vertice, che viene approssimato con l'espansione della self-energy secondo la procedura di Breit-Wigner. In cui sono manifesti gli effetti di interferenza tra le ampiezze di emissione associate a stati di parità differente alla base del rapporto  $R$ . In questi regimi di coupling diventano più visibili i due picchi nei quadranti per momenti paralleli, la cui causa risiede nel differente segno della self-energy usata per il propagatore

della singola eccitazione atomica, quindi di natura non-perturbativa. Il rapporto  $R$  in questo caso corrisponde al punto di ascissa  $k_0 d = \frac{\pi}{2}$  della curva tratteggiata blu in Figura 2 (c), quindi prossimo a 3. I picchi di quest'ultimo grafico in corrispondenza di tale ascissa sono punti appartenenti alla curva arancione di Figura 2 (a), in cui si evince che l'aumento della distanza ha l'effetto di accoppiamento maggiore per la descrescita più rapida del rapporto legata alla maggiore popolazione dello stato legato plasmonico al di sotto del cutoff  $m$ . Nel pannello (b) è possibile verificare che tali effetti sono limitabili attraverso l'incremento del valore di  $\epsilon$ , che effettivamente risulta come un tendere ad accoppiamenti minori. Sperimentalmente la popolazione dello stato legato plasmonico potrebbe essere usata come filtro sul numero di fotoni in output nello studio del fenomeno di scattering per stati iniziali con fotoni.

## ALCUNI ESEMPI

Considerando il sistema composto da  $n = 3$ , lo stato legato antisimmetrico è sempre nella forma  $a_2 = 0, a_3 = -a_1$  ed è associato a risonanza esatta  $E_v$ . Invece, lo stato simmetrico obbedisce al profilo d'ampiezza  $a_3 = a_1, a_2 \approx 2(-1)^{v+1}a_1$ , in cui l'ultima espressione è esatta solo trascurando i tagli, mentre includendoli si hanno correzioni nell'ordine  $O(e^{-md})$ , così come nello spostamento dell'autovalore. In corrispondenza di questi autovalori vi è anche lo stato instabile, nella forma di stato W con ampiezze in modulo uniformi.

Il sistema con  $n = 4$  mostra una descrizione non-perturbativa con un nuovo autostato associato ad un autovalore che lo caratterizza come nuovo ground state per gli stati legati nel continuo, in forma  $a_1 = (-1)^{v+1}a_4, a_2 = (-1)^{v+1}a_3 \approx (-1)^{v+1}3a_1$  per  $2 \lesssim md \lesssim 6$ . Gli autostati corrispondenti all'autovalore degenere sono  $a_1 = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}a_2 = (-1)^v \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}a_3 = (-1)^{v+1}a_4$ , il cui gap energetico  $\epsilon$  rompe la degenerazione. L'autostato che si sposta dalla risonanza esatta è in forma dimerizzata  $a_1 = (-1)^{v+1}a_2, a_3 = (-1)^{v+1}a_4, a_1 = (-1)^v a_4$ . Anche per questo sistema lo stato instabile è nella forma W già presentata.

Al diminuire di  $d$  si è osservata la produzione di coppie di autostati ad alte energie per entrambi i casi. Questi stati appartengono al settore simmetrico e corrispondono ad una risonanza approssimata per uno spacing doppio, in cui bisogna tener conto di contributi di taglio non trascurabili. Seppur questi stati non possono essere osservati nell'approssimazione di accoppiamento con singolo modo, lo studio è stato esteso fino a sistemi con  $n = 12$  in cui l'energia critica più bassa si è abbassata di un fattore circa 7 e la distanza critica ha seguito un incremento di circa lo stesso fattore.

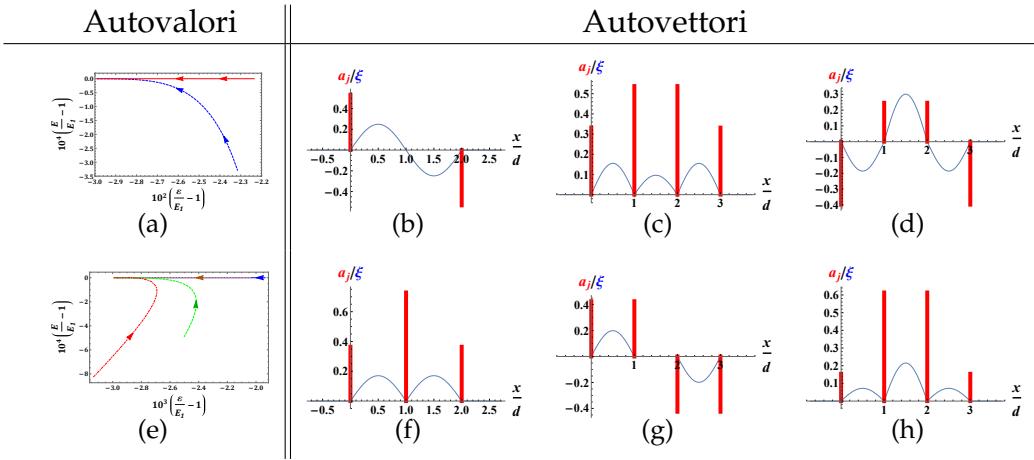


Figura 3: Andamento dell’energia  $E$  degli stati legati in prossimità del valore di risonanza  $E_1(d)$  per  $n = 3$  [pannello (a)] e per  $n = 4$  [pannello (e)]. In (a), sono mostrate la traiettoria per il caso simmetrico in (f) (blu tratteggiata) e antisimmetrico in (b) (continua rossa) con frecce nel verso di  $d$  crescente. In (e) è mostrato lo stesso comportamento rispetto  $d$  delle traiettorie per gli stati simmetrici in (c) e (d) in pratica sovrapposte (continua blu, a pallini marrone), per lo stato antisimmetrico dimerizzato in (g) (tratteggiata verde) e per il nuovo stato simmetrico in (h) (a pallini-tratteggiata rossa). Le ampiezze di eccitazione atomiche  $a_j$  sono rappresentate per gli autovettori come barre (rosse) in corrispondenza delle posizioni dei qubit, con distanze riscalate rispetto a  $md = 7$ , mentre la costante di accoppiamento è  $\gamma = 10^{-2}m^2$ .

## ONDE DI SPIN E MULTIMERIZZAZIONE

Il numero di contributi di taglio considerati rappresenta il coupling nel sistema ridotto tra un pari numero di vicini per sito nel reticolo unidimensionale. Per distanze  $d$  sufficientemente grande ci si può limitare a considerare non nullo il solo primo contributo  $b_1$ , mentre si impone  $b_j = 0$  per ogni  $j \geq 2$ . Per questo motivo non indicheremo l’indice esplicitamente e si definisce la matrice di self-energy riscalata rispetto la scala di energia del taglio  $\Sigma_n(\varphi) = -\frac{1}{b}\Sigma(E)$ :

$$\mathcal{U}_n \Sigma_n(\varphi) \mathcal{U}_n^\dagger = \Sigma_{[n/2]}^+(\varphi) \oplus \Sigma_{\lceil n/2 \rceil}^-(\varphi),$$

dove  $\varphi = \frac{b_0}{2b}$ . La struttura di queste matrici corrisponde a quella del Laplaciano di grafo, codificante condizioni di bordo differenti in base al numero di qubit ed alla parità considerata.

Per il caso  $n = 2h + 1$  si ha che gli autovalori di risonanza  $E_v$  coincidono con il settore antisimmetrico, in cui il qubit centrale è sempre disecvitato, come già

mostrato per  $n = 3$ . In questo modo la decomposizione della matrice di self-energy in una somma diretta comporta il blocco antisimmetrico nella seguente forma:

$$\Sigma_h^-(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\varphi & 1 & & \\ 1 & 2\varphi & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 2\varphi & 1 \\ & & & 1 & 2\varphi \end{pmatrix},$$

coincidente con il Laplaciano alle differenze finite su un reticolo dotato di spacing unitario, a cui è stato bilanciato il potenziale associato al grado di ogni vertice, in questo caso pari a 2, mentre  $\varphi$  causa una traslazione globale dello spettro. Le condizioni di bordo vengono applicate a due vertici fittizi adiacenti rispettivamente ai due estremi della metà catena di  $h$  qubit, in questo caso nella forma Dirichlet-Dirichlet  $a_0 = a_{h+1} = 0$ , così comprendendo meglio il ruolo del qubit centrale  $(h + 1)$ -esimo fungente da specchio, mentre la restante metà è ottenuta per antisimmetria. Gli autovalori semplici  $\lambda_j$  e gli associati autovettori  $a_\ell^{(j)}$  sono:

$$\lambda_j = -4 \sin^2 \left( \frac{j\pi}{2(h+1)} \right), \quad a_\ell^{(j)} = \sqrt{\frac{2}{h+1}} \sin \left( \frac{j\pi}{h+1} \ell \right),$$

dove  $j, \ell = 1, 2, \dots, h$ .

I blocchi associati alle risonanze esatte per  $n = 2h$  sono simmetrici o antisimmetrici in base a  $v$  rispettivamente dispari o pari. La forma del blocco diagonale della matrice di self-energy diventa:

$$\Sigma_h^\pm(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\varphi & 1 & & \\ 1 & 2\varphi & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 2\varphi & 1 \\ & & & 1 & 2\varphi \pm 1 \end{pmatrix},$$

in cui le condizioni di bordo sono di tipo Dirichlet-Neumann  $a_0 = 0, a_h = a_{h+1}$ , oppure Dirichlet-antiNeumann  $a_0 = 0, a_h = -a_{h+1}$ , con rispettivi autosistemi:

$$\lambda_j = \mp 4 \sin^2 \left( \frac{(j - \frac{1}{2})\pi}{2h+1} \right), \quad a_\ell^{(j)} = \sqrt{\frac{2}{h+\frac{1}{2}}} (\pm 1)^{\ell+1} \sin \left( \frac{(j - \frac{1}{2})\pi}{h+\frac{1}{2}} \ell \right).$$

Per quanto riguarda i blocchi che si spostano dalla condizione di esatta risonanza, essi possono essere espressi attraverso l'introduzione dello stato instabile

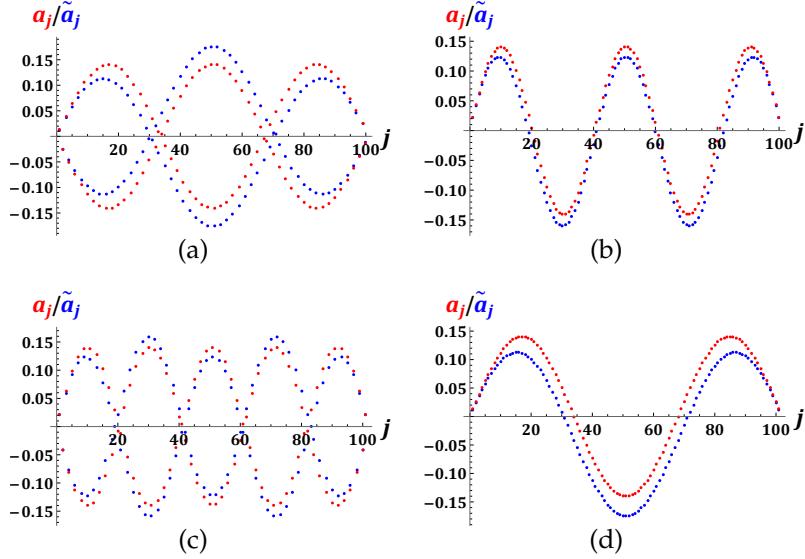


Figura 4: Nei pannelli (a-b) sono rappresentati il primo ed il secondo modo per  $n = 100$  rispettivamente per  $\nu = 1$  e  $\nu = 2$ , mentre viceversa in merito a  $\nu$  nei pannelli (c-d) per  $n = 101$ . Gli autovettori  $a$  (rossi) sono associati alla  $\Sigma(E)$  in forma di Laplaciano di grafo, mentre  $\tilde{a}$  (blu) sono autovettori di  $\widetilde{\Sigma}(E)$ .

$\mathbf{u}$  nella forma  $W$ , menzionato per i sistemi con  $n = 3$  e  $n = 4$ , per implementare quelle che sono note come modificazioni di rango-1 di problemi agli autovalori simmetrici:

$$\widetilde{\Sigma}_{\lceil n/2 \rceil}(b) = b\Sigma_{\lceil n/2 \rceil}(\varphi) - n \mathbf{i} \ \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}^T,$$

dove  $\otimes$  è il prodotto esterno e sono state trascurate perturbazioni a  $\mathbf{u}$  esponenzialmente soppresse con  $d$ . Applicando la presentata diagonalizzazione  $\Sigma_{\lceil n/2 \rceil}(\varphi) = \Xi \Lambda \Xi^T$  si ruota lo stato instabile secondo la matrice degli autovettori:

$$\widetilde{\Sigma}_{\lceil n/2 \rceil}(b) = \Xi \left( b\Lambda - n \mathbf{i} \ \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}^T \right) \Xi^T = \widetilde{\Xi} \widetilde{\Lambda} \widetilde{\Xi}^T,$$

a cui applicare la formula di Bunch-Nielsen-Sørensen per gli autovettori  $\tilde{a}^{(j)}$ . [1] La caratterizzazione degli autosistemi si è conclusa con lo studio del fenomeno di multimerizzazione per  $n = 2h + 1$ . Esso deriva dalla fattorizzazione del determinante associato al propagatore inverso, riespresso per comodità come:

$$G^{-1}(E) = -\frac{i\gamma}{\sqrt{E^2 - m^2}} A_n(E), \quad \det A_h^-(E) = U_h(E),$$

dove  $U_h(E)$  sono i polinomi di Chebyshev del secondo tipo. Nel caso di  $h = 2p + 1$  si ha la seguente fattorizzazione:

$$\det A_{2p+1}^-(E) = U_{2p+1}(E) = 2T_{p+1}(E)U_p(E),$$

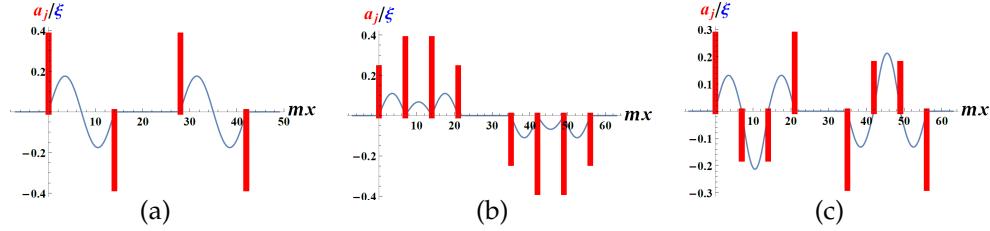


Figura 5: Rappresentazione di autostati corrispondenti a  $E_1(d)$  trimerizzati per  $n = 7$  [pannello (a)] e tetramerizzati per  $n = 9$  [pannelli (b-c)]. I parametri usati sono  $\gamma = 10^{-2}m^2$  e  $md = 7$ .

dove  $T_{p+1}(E)$  sono i polinomi di Chebyshev del primo tipo, ottenuta usando la proprietà  $2T_n U_l = U_{l+n} + U_{l-m}$ , con  $U_{-1} = 0$ . Nel caso di  $h = 2p$  si ottiene una diversa fattorizzazione, nella forma:

$$\det A_{2p}^-(E) = U_{2p}(E) = U_p^2(E) - U_{p-1}^2(E) = (U_p(E) + U_{p-1}(E))(U_p(E) - U_{p-1}(E)),$$

derivante dalla proprietà  $U_n U_l = \sum_{k=0}^l U_{n-l+2k}$ .

## CONFERENZE

Nel corso del dottorato vi è stata la partecipazione alle seguenti conferenze e summer school:

- "Statistical Mechanics & Field Theory 2017", conferenza tenutasi presso Bari con partecipazione alla fase di registrazione degli ospiti;
- "Problemi Attuali di Fisica Teorica 2018", conferenza tenutasi presso Vietri sul mare con preparazione di un talk;
- "Information Geometry, Quantum Mechanics and Applications", conferenza tenutasi presso San Rufo-Policeta con preparazione di un talk;
- "Problemi Attuali di Fisica Teorica 2019", conferenza tenutasi presso Vietri sul mare;
- "The 51<sup>st</sup> Symposium on Mathematical Physics", conferenza tenutasi presso Torun (Polonia) con preparazione di un poster;
- "Italian Quantum Information Science conference", conferenza tenutasi presso Milano con preparazione di un poster;

- "26th Summer School on Parallel Computing", tenutasi presso CINECA in Casalecchio di Reno (Bologna);
- "Collective behavior in quantum matter", summer school tenutasi presso ICTP (Trieste) con preparazione di un poster.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] J. R. Bunch, C. P. Nielsen and D. C. Sørensen, *Rank-one modification of the symmetric eigenproblem*, Numerische Mathematik 31 (1) 31–48 (1978).
- [2] P. Facchi, M. S. Kim, S. Pascazio, F. V. Pepe, D. Pomarico and T. Tufarelli, Phys. Rev. A **94**, 043839 (2016).
- [3] P. Facchi, S. Pascazio, F. V. Pepe and D. Pomarico, Phys. Rev. A **98**, 063823 (2018).
- [4] P. Facchi, D. Lonigro, S. Pascazio, F. V. Pepe and D. Pomarico, Phys. Rev. A **100**, 023834 (2019).
- [5] P. Facchi, D. Lonigro, S. Pascazio, F. V. Pepe and D. Pomarico, in preparation (2019).